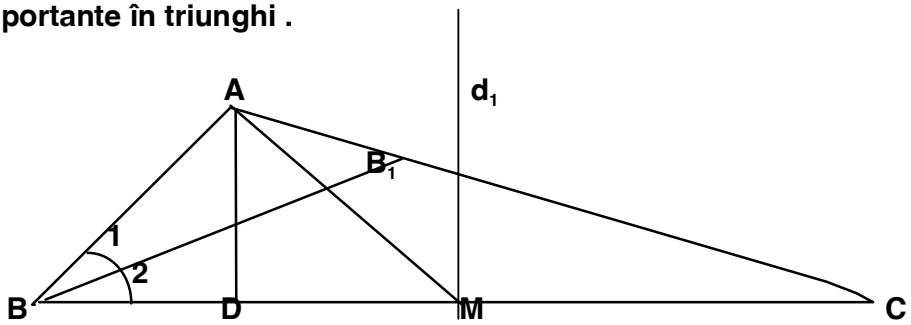
B. TRIUNGHIURI

B_1. Linii importante în triunghi .



1. Înălțimea [**AD**] - este perpendiculara din vârf pe latura opusă. **(AD ⊥ BC).** Punctul de intersecție al înălțimilor se numește **ortocentru triunghiului** sau (**centru drept**) .

2. Mediana [**AM**] **-** unește vârful cu mijlocul laturii opuse. **(BM ≡ CM).** Punctul de intersecție al medianelor este **centrul de greutate a triunghiului . El se află situat la 2/3 de vârf și 1/3 de bază**

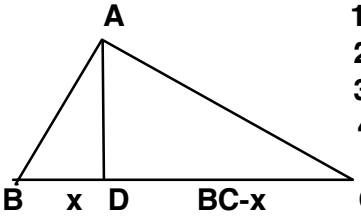
3. Bisectoarea [BB_1] - împarte un unghi în două părți egale. **($\angle B_1 = \angle B_2$).** Punctul de intersecție al bisectoarelor este **centrul cercului înscris în triunghi.**

4. Mediatoarea (d_1) - este perpendiculara pe mijlocul unei laturi. **($d_1 \perp BC$; BM ≡ CM)**. Punctul de intersecție al mediatoarelor este **centrul cercului circumscris triunghiului .**

5. Linia mijlocie - unește mijloacele a două laturi . Are două proprietăți :

- este paralelă cu a treia latură a triunghiului
- este jumătate din a treia latură ca lungime.

B_2. Proprietățile triunghiului oarecare .



1° suma unghiurilor interioare unui triunghi este 180°.
2° suma unghiurilor exterioare este 360°.
3° perimetrul este egal cu suma laturilor .**P=a+b+c**
4°masura unui unghi exterior=suma unghiurilor interioare nealaturate

5° aria triunghiului se poate afla în trei moduri :

1) S_Δ = (baza x înălțimea) / 2 = (BC · AD) / 2 .

2) $S_\Delta = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ unde : a,b,c = laturile triunghiului p = (a + b + c) / 2

3)Dacă laturile triunghiului sunt exprimate prin radicali - mai intai se verifica daca Δ este dreptunghic (**se ridica laturile la patrat si se observa daca verifica teorema lui Pitagora**) ; daca nu este dreptunghic atunci se procedeaza astfel:

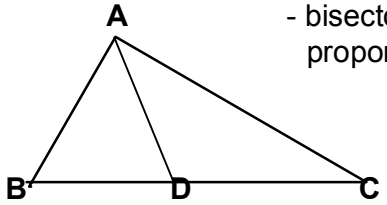
- se duce înălțimea AD și se notează BD = x ; CD = BC-x
- se scrie teorema lui Pitagora în ΔADB și in ΔADC$\Rightarrow AD^2=AB^2-x^2$ și $AD^2 = AC^2 - (BC-x)^2$
- egalând relațiile se obține: $AB^2 - x^2 = AC^2 - BC^2+2BC\cdot x - x^2 \Rightarrow x = (AB^2-AC^2+BC^2) / 2\cdot BC$
- după aflarea lui x se află AD apoi se află aria cu relația **S_Δ = (BC · AD) / 2**

http://eprof.ro/matematica

6^0 In orice triunghi produsul dintre lungimea inaltimii si a laturii corespunzatoare ei este constant

$AD \cdot BC = BB' \cdot AC = CC' \cdot AB$

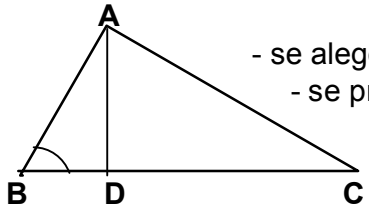
7^0 Teorema bisectoarei



- bisectoarea unui unghi imparte latura opusa unghiului in segmente proportionale cu laturile care formeaza unghiul.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

8^0 Teorema lui Pitagora generalizata



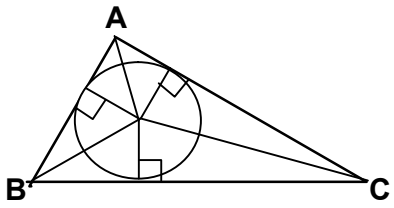
- se alege un unghi ca referinta ($\angle$**B**)
- se proiecteaza latura mica a unghiului pe latura lui mare($AD \perp BC$)
  BD este proiectia lui **AC** pe **BC**

Se face urmatorul rationament: daca $\angle B=90° \Rightarrow AC^2 = BC^2 + BA^2$, dar $\angle B < 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \cdot BD \cdot BC$**

9^0 Raza cercului inscris intr-un triunghi $r = \frac{A}{p}$ **A=**aria triunghiului

p= semiperimetrul $= \frac{a + b + c}{2}$



Pentru calculul razei cercului circumscris intr-un triunghi se poate utiliza urmatoarea metoda:

- se duce din centrul cercului inscris cite o perpendiculara pe fiecare latura (acestea sunt raze in cerc) **$r \perp AB$; $r \perp AC$; $r \perp BC$**

- se uneste centrul cercului (**O**) cu virfurile triunghiului si se obtin trei triunghiuri

ΔOAB ; ΔOAC ; ΔOBC

- se scrie aria triunghiului mare ca suma ariilor celor trei triunghiuri mai mici obtinute

$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle OAB} + A_{\triangle OAC} + A_{\triangle OBC}$

$$- A_{\triangle ABC} = \frac{r \cdot AB}{2} + \frac{r \cdot AC}{2} + \frac{r \cdot BC}{2} = \frac{r \cdot (AB + AC + BC)}{2} \Rightarrow \mathbf{r = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABC}}{AB + AC + BC}}$$

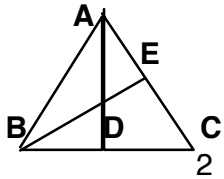
10^0 Raza cercului circumscris unui triunghi.

$$\mathbf{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}}$$

a , b , c - sunt laturile triunghiului , iar **A** - este aria triunghiului

http://eprofu.ro/matematica

B_3 . Proprietățile triunghiului isoscel.

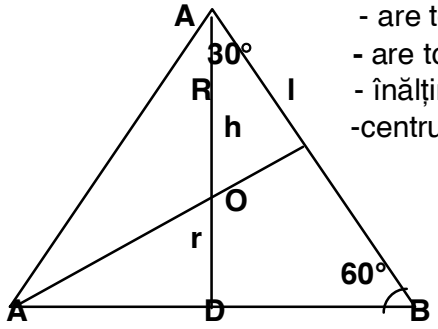


- are două laturi egale AB = AC
- are două unghiuri egale $\angle B = \angle C$
- **AD** este înălțime , mediană , bisectoare , mediatoare .
- pentru calculul înălțimii BE se scrie aria Δ ABC în două moduri :

2

$$\left.\begin{array}{l} S = AD \cdot BC / 2 \\ S = BE \cdot AC / 2 \end{array}\right\} \Rightarrow AD \cdot BC = BE \cdot AC \Rightarrow BE = AD \cdot BC / AC$$

B_4 . Proprietățile triunghiului echilateral .



- are toate laturile egale AB = BC = AC = l
- are toate unghiurile egale $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$
- înălțimile sunt mediane , mediatoare , bisectoare
- centrul cercului înscris și circumscris este în punctul **O**
- raza cercului înscris **r = h / 3**
- raza cercului circumscris **R = 2·h / 3**

R = 2·r r=R / 2 h = R + r

• Se mai pot utiliza formulele : $\mathbf{h = \frac{l\cdot\sqrt{3}}{2}}$ si $\mathbf{Aria_{\Delta} = \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}}$

***Pentru rezolvarea triunghiului echilateral se lucrează în Δ ADC .**

- dacă se cunoaște latura **l** înalțimea **h** se află cu teorema lui Pitagora : $AD^2 = AC^2 - DC^2$
- dacă se cunoaște înălțimea **h** atunci latura **l** se afla utilizind :

sin 60° = h / l $\Rightarrow$ √3 / 2 = h / l $\Rightarrow$ l = 2·h / √3

- dacă se cunoaște **R** sau **r** mai întâi se află înălțimea **h** ; **h = R + r R=2r sau r=R/2** apoi se procedează ca la punctul precedent
- dacă se cunoaște aria Δ ABC se rezolvă sistemul $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{h\cdot l / 2 = S_{\Delta}} \\ \mathbf{l = 2\cdot h / \sqrt{3}} \end{array}\right.$ de unde rezultă **h** și **l**

- pentru a calcula **suma distanțelor de la un punct interior al triunghiului la laturile acestuia** se scrie aria triunghiului mare ca sumă ale ariilor triunghiurilor ce se formează unind punctul respectiv cu vârfurile triunghiului inițial

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ACM}$

$$\frac{l\cdot h}{2} = \frac{d_1\cdot l}{2} + \frac{d_2\cdot l}{2} + \frac{d_3\cdot l}{2} \Rightarrow l\cdot h = l\cdot(d_1 + d_2 + d_3) \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = h = \frac{l\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\cdot r$$

http://eprofu.ro/matematica