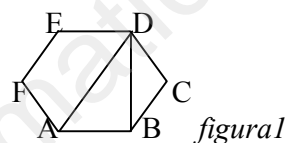


Teste matematica propuse 2005 – TEST 1

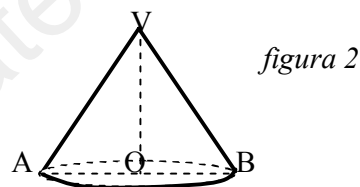
PARTEA I (45 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai rezultatele.

- 3p 1. Rezultatul calculului: a) $504 : 14$ este egal cu
- 3p b) $12,5 \cdot 100$ este egal cu
- 3p c) 15% din 20 este egal cu
- 3p 2. a) Divizorii numarului 30 este egal cu
- 3p b) Descompus in factori primi numarul 126 este egal cu
- 3p c) Cel mai mare divizor comun al numerelor 30 si 126 este egal cu
3. Fie functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2a + 3) \cdot x + 1$
- 3p a) $f(a) = \dots\dots\dots$
- 3p b) Daca $f(a) = 0$, atunci numarul a este egal cu
- 3p c) Daca $a = -2$ si $f(x) < 0$, atunci numarul x se afla in intervalul

- 3p 4. In *figura 1*, hexagonul regulat ABCDEF are aria $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- 3p a) Lungimea laturii AB este egala cu cm
- 3p b) Lungimea segmentului DB este egal cucm
- 3p c) Aria triunghiului DBC = cm^2



- 3p 5. In *figura 2*, VAB este un con circular drept
- Generatoarea $VA = 4 \text{ cm}$ iar masura unghiului $AVB = 60^\circ$
- 3p a) Raza conului este egala cucm
- 3p b) Aria totala a conului este egala cu cm^2 .
- 3p c) Volumul conului este egal cu cm^3 .

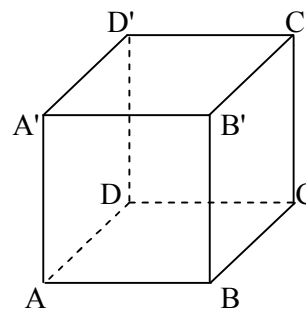


PARTEA a II –a (45 puncte)- Pe foaia de examen scrieti rezolvarile complete.

1. Fie multimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x - 1 < 3\}$ si $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x - 5}{x + 1} \in \mathbb{Z}\}$
- 6p a) Enumerati elementele multimii A si elementele multimii B
- 4p b) Calculati $A \cap B$ si $A \setminus B$.

2. Fie expresia $E(x) = \left(1 + \frac{x + 2}{x - 1}\right) : \frac{1 - 4x^2}{1 - x^2}$
- 5p a) Aratati ca $E(x) = \frac{x + 1}{2x - 1}$
- 5p b) Determinati $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ nu are valoarea definita in a
- 5p c) Determinati $b \in \mathbb{R}$ astfel incat $E(b) = 2$

3. In *figura 3* ABCDA'B'C'D' este o prisma dreapta cu baza patrat. Lungimile muchiilor AB si AA' sunt direct proportionale cu 3 si 6
- Aria totala a prisme este 360 cm^2 , iar O este centrul bazei mari
- 5p a) Completati pe foaia de examen desenul din *figura 3* cu D'O
- 5p b) Calculati lungimile muchiilor AB si AA'
- 5p c) Daca $AB = 6 \text{ cm}$ si $AA' = 12 \text{ cm}$, calculati lungimea lui D'O
- 5p d) Calculati masura unghiului dintre planele (D'AC) si (D'DB)



REZOLVARE TEST 1

1. 1. a) $504 : 14 = 36$

b) $12,5 \cdot 100 = 1250$ sau $12,5 \cdot 100 = \frac{125}{10} \cdot 100 = 125 \cdot 10 = 1250$

c) $15\% \text{ din } 20 = \frac{15}{100} \cdot 20 = \frac{15}{5} = 3$

2. a) 30 se imparte la 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \Rightarrow divizorii lui 30 sunt $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$
 Daca se specifica divizorii **naturali** \Rightarrow divizorii lui 30 sunt 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

b)
$$\begin{array}{r} 126 \overline{) 2} \\ 63 \overline{) 3} \\ 21 \overline{) 3} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array} \Rightarrow 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

c)
$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 3} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array} \Rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r} 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \text{c.m.m.d.c.} = 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \text{ (se iau numai termenii comuni o singura data la puterea cea mai mica)}$$

3. a) $f(x) = (2a + 3) \cdot x + 1 \Rightarrow f(a) = (2a + 3) \cdot a + 1 = 2a^2 + 3a + 1 \Rightarrow f(a) = 2a^2 + 3a + 1$

b) $f(a) = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a + 1 = 0$ Pentru aceasta ecuatie sunt doua metode de rezolvare:

1. **Se descompune expresia** $\Rightarrow 2a^2 + 3a + 1 = 2a^2 + 2a + a + 1 = 2a(a+1) + (a+1) = (a+1)(2a+1)$
 $(a+1) \cdot (2a+1) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$
 $2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

2. **Se rezolva ecuatia de gradul 2** $\Rightarrow 2a^2 + 3a + 1 = 0 \Rightarrow$ coeficientii $A=2 \quad B=3 \quad C=1$

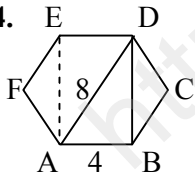
$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

$$a_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A} = \frac{-3 \pm 1}{2 \cdot 2} \Rightarrow a_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; a_2 = \frac{-3 - 1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Oricare metoda se utilizeaza $\Rightarrow a \in \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}$

c) daca $a = -2 \Rightarrow f(x) = [2 \cdot (-2) + 3] \cdot x + 1 \Rightarrow f(x) = (-4 + 3) \cdot x + 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1$
 daca $f(x) < 0 \Rightarrow -x + 1 < 0 \Rightarrow -x < -1 / \cdot (-1) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1; +\infty)$

4.
$$\text{a) Aria hexagonului} = 6 \cdot \text{Aria unui } \Delta \text{ echilateral} = 6 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



$$\frac{6 \cdot L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot L^2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 24\sqrt{3} / :6\sqrt{3} \Rightarrow L^2 = 16 \Rightarrow L = \sqrt{16} \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

b) Diagonala AD este diametrul cercului circumscris hexagonului. In cerc $D = 2 \cdot R$

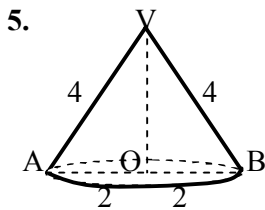
Latura hexagonului regulat este egala cu raza cercului circumscris $\Rightarrow AD = 2 \cdot AB \Rightarrow AD = 8 \text{ cm}$

In ΔABD dreptunghic $\Rightarrow DB^2 = AD^2 - AB^2 \Rightarrow DB^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow DB = \sqrt{48} \Rightarrow DB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

Aria hexagonului – Aria dreptunghiului ABDE

c)
$$\text{Aria } \Delta DBC = \text{Aria } \Delta EFA = \frac{24\sqrt{3} - 16\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Aria } \Delta DBC = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Aria } ABDE = AB \cdot BD = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{Aria } \Delta DBC = \frac{24\sqrt{3} - 16\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Aria } \Delta DBC = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



5. a) Dacă măsura unghiului $\angle AVB = 60^\circ \Rightarrow \Delta VAB$ – echilateral $\Rightarrow AB = VA$

$$OB = \frac{AB}{2} \Rightarrow OB = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow R = 2 \text{ cm}$$

b) Aria totală con = Aria laterală + Aria bazei

$$\text{Aria laterală} = \pi \cdot R \cdot G = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi \text{ cm}^2; \text{Aria bazei} = \pi \cdot R^2 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Aria totală} = 8\pi + 4\pi = 12\pi \Rightarrow \text{Aria totală} = 12\pi \text{ cm}^2.$$

c) În ΔVOB dreptunghic $\Rightarrow VO^2 = VB^2 - OB^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow VO = \sqrt{12} \Rightarrow VO = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$$\text{Volumul conului} = \frac{\text{Aria bazei} \cdot \text{înălțimea}}{3} = \frac{4\pi \cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Partea a II a.

1. a) $-4 \leq x - 1 < 3 \Rightarrow -4 + 1 \leq x < 3 + 1 \Rightarrow -3 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [-3; 4)$

Deoarece $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ elementele multimii A vor fi numerele întregi din intervalul $[-3; 4)$

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$x - 5$$

$\frac{\quad}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ fracția este număr întreg dacă numitorul divide numărătorul

$$x + 1$$

$$x + 1 \mid x + 1$$

$$x + 1 \mid x - 5 \cdot (-1) \Rightarrow \frac{x + 1 \mid -x + 5}{x + 1 \mid 6} (+)$$

$$x + 1 \mid 6 \Rightarrow (x + 1) = D_6 \Rightarrow (x + 1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 \Rightarrow x = 0; x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 \Rightarrow x = 1; x + 1 = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 \Rightarrow x = 2; x + 1 = 6 \Rightarrow x = 6 - 1 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -1 - 1 \Rightarrow x = -2; x + 1 = -2 \Rightarrow x = -2 - 1 \Rightarrow x = -3; x + 1 = -3 \Rightarrow x = -3 - 1 \Rightarrow x = -4;$$

$$x + 1 = -6 \Rightarrow x = -6 - 1 \Rightarrow x = -7$$

Deoarece $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}$

b) $A \cap B$ – se iau elementele comune din A și B $\Rightarrow A \cap B = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$

$A \setminus B$ – se iau elementele care sunt în A și nu sunt în B $\Rightarrow A \setminus B = \{-1, 3\}$

$$2. a) E(x) = \left(1 + \frac{x+2}{x-1}\right) : \frac{1-4x^2}{1-x^2} = \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{x+2}{x-1}\right) : \frac{(1-2x)(1+2x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$E(x) = \frac{(x-1+x+2)}{x-1} : \frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} \quad (\text{am înmulțit numărătorul și numitorul cu } (-1) \text{ ca să pot schimba poziția termenilor } (1-2x) \text{ și } (1-x))$$

$$E(x) = \frac{2x+1}{x-1} : \frac{(x-1)(x+1)}{(2x-1)(2x+1)} \Rightarrow E(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

b) $E(a) = \left(1 + \frac{a+2}{a-1}\right) : \frac{1-4a^2}{1-a^2}$ $E(a)$ nu are valoarea definită în a când numitorii fracțiilor sunt nuli
La fracția care are în față semnul $:$ se egalează cu 0 și numărătorul

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1; 1 - a^2 = 0 \Rightarrow (1-a)(1+a) = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a = 1$$

$$1+a=0 \Rightarrow a = -1$$

$$1-4a^2=0 \Rightarrow (1-2a)(1+2a)=0 \Rightarrow 1-2a=0 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}; 1+2a=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

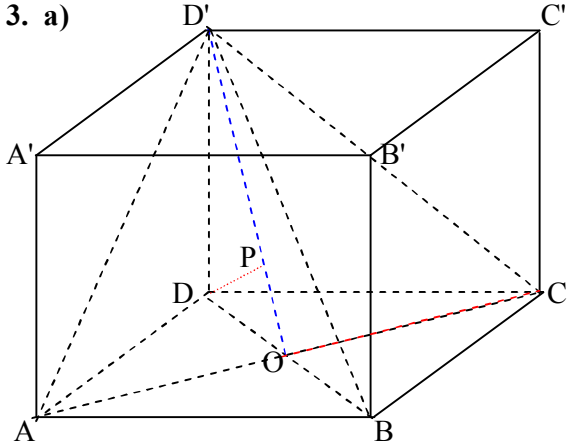
$$a \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

c) Dacă $E(x) = \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow E(b) = \frac{b+1}{2b-1}$; $E(b) = 2 \Rightarrow \frac{b+1}{2b-1} = 2 \Rightarrow b+1 = 2 \cdot (2b-1)$

$b+1 = 4b-2 \Rightarrow b-4b = -2-1 \Rightarrow -3b = -3 \cdot (-1) \Rightarrow 3b = 3 \cdot 1 \Rightarrow b = 1$
 De la punctual precedent am aflat ca expresia nu are valoarea definita pentru $a \in \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$

Similar $E(b)$ nu are valoarea definita pentru $b \in \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow b \neq 1 \Rightarrow b \in \emptyset$

3. a)



b) Dacă AB și AA' sunt direct proportionale cu 3 și 6 $\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AA'}{6} = k \Rightarrow AB = 3 \cdot k$ și $AA' = 6 \cdot k$
 Aria totală = Aria laterală + 2 · Aria bazei $Al = Pb \cdot h$ $Ab = L^2$ $Al = 4 \cdot L \cdot h = 4 \cdot 3k \cdot 6k = 72k^2$ $Ab = (3k)^2 = 9k^2$
 Aria totală = $72k^2 + 18k^2 = 90k^2$, deoarece $At = 360 \text{ cm}^2 \Rightarrow 90k^2 = 360 \Rightarrow k^2 = 360 : 90 \Rightarrow k^2 = 4$
 $\Rightarrow k = \pm \sqrt{4} \Rightarrow k = \pm 2$, deoarece lucrăm cu segmente $\Rightarrow k = 2$
 $\Rightarrow AB = 3 \cdot 2 = 6$ iar $AA' = 6 \cdot 2 = 12 \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}$ iar $AA' = 12 \text{ cm}$

c) Diagonala patrutului = $L\sqrt{2} \Rightarrow DB = 6\sqrt{2}$, $OD = DB / 2 \Rightarrow OD = 6\sqrt{2} / 2 \Rightarrow OD = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

In $\Delta D'O$ $\Rightarrow D'O^2 = D'D^2 + DO^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 144 + 18 = 162 \Rightarrow D'O = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

Deci $D'O = 9\sqrt{2} \text{ cm}$

d) Pentru a afla unghiul dintre doua plane se identifica latura comuna a celor doua plane, apoi din fiecare plan se construiesc cate o perpendiculara pe latura comuna.

Unghiul dintre cele doua plane va fie egal cu unghiul dintre cele doua perpendiculare construite.

$D'O \subset (D'AC)$, $D'O \subset (D'DB) \Rightarrow (D'AC) \cap (D'DB) = D'O$
 Construiesc $DP \perp D'O$, $DP \subset (D'DB)$
 $\Delta D'AC$ isoscel cu $D'O$ mediana $\Rightarrow D'O \perp AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow D'O \perp CO \Rightarrow CO \perp D'O$, $CO \subset (D'AC)$

$CO \perp D'O$
 Deoarece diagonalele in patrat sunt perpendiculare $\Rightarrow CO \perp DB$
 Segmentele $D'O$ și DB sunt incluse in planul $(D'DB)$ și sunt concurente

Deoarece DP este inclusa in planul $(D'DB) \Rightarrow CO \perp DP \Rightarrow \angle(DP ; CO) = 90^\circ$

Deci $\angle(D'AC) ; (D'DB) = 90^\circ$