A2 OPERATII CU RADICALI

Obs. În exercițiile cu radicali în prima etapă se scot factorii de sub radicali apoi se efectuează celelalte operații.

1. Scoaterea factorului de sub radical se face în mai multe etape :

- mai întâi se descompune numărul în factori ;
- se scrie ca un produs de numere la patrat (puterea a doua);
- se scot de sub radical numerele la patrat, **fara exponent**;
- se efectuează produsul dintre numere .

Ex. a) $\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; b) $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 2^2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 2^2 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \mathbf{32 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 2^2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 3^2 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \mathbf{108 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3}$$

O alta metoda care se utilizeaza in special pentru numerele mari este accea de a scrie numarul ca un produs de patrate perfecte (4,9,16,25,36,.....100,...etc), sau un produs de patrate perfecte si numere intregi.

Ex. $\sqrt{500} = \sqrt{5 \cdot 100} = \sqrt{5 \cdot 10^2} = 10\sqrt{5}$; $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{6^2 \cdot 10^2} = 6 \cdot 10 = 60$

Orice metoda se va utiliza **TREBUIE RETINUT** ca un numar iese de sub radical (de ordinul 2) ca numar intreg, daca si numai daca este **partat perfect** (daca poate fi scris ca un numar intreg la puterea a doua). **ATENTIE!** numarul iese fara exponent.

Obs. Dacă numărul de sub radical este zecimal sau periodic , se transformă în fracție după care se scoate factorul de sub radicalul de la numărător și cel de la numitor iar în final se raționalizează.

Ex. a) $\sqrt{0,125} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{100}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{0,1(7)} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{90}} = \frac{4^{(\sqrt{10}}}{3\sqrt{10}} = \frac{{}^{2}4 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot 10_{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{15}$

2. Introducerea factorului sub radical se face prin ridicarea numărului din fața radicalului la puterea a doua și înmulțirea lui cu numărul de sub radical.

Ex. $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

3. Calcule cu radicali.

Suma algebrică se face numai între radicalii de același fel însumând algebric numerele din fața radicalilor de același fel și copiind radicalul.

Produsul dintre doi radicali se face înmulțind numerele din fața radicalilor intre ele și numerele de sub radical intre ele ; similar se face și **împărțirea.**

Ridicarea la putere a unui termen care contine si radical se face prin ridicarea la puterea respectiva atat a numarului din fata radicalului cat si a numarului de sub radical.

Daca **se ridica la putere** o paranteza in care este **o suma algebrica de termeni** se aplica **formulele de calcul prescurtat**.

Exemple

a) $\sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{98} + \sqrt{147} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{125} = 4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{5} = 20\sqrt{10}$; **c)** $\sqrt{486} : \sqrt{27} = 9\sqrt{6} : 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

d) $(5\sqrt{3})^2 = 5^2 \cdot \sqrt{3}^2 = 25 \cdot 3 = 75$; **e)** $(3\sqrt{2})^3 = 3^3 \cdot \sqrt{2}^3 = 27 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 2} = 27 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 54\sqrt{2}$

f) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 3 - 12\sqrt{6} + 9 \cdot 2 = 12 - 12\sqrt{6} + 18 = 30 - 12\sqrt{6}$

Se aplica formula $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$, in cazul nostru $a=2\sqrt{3}$ si $b=3\sqrt{2}$

4. Raționalizarea numitorului. Dacă între numerele de la numitor este înmulțire se scoate factorul de sub radical apoi se amplifică fracția cu radicalul de la numitor. Dacă între numerele de la numitor este sumă algebrică se amplifică fracția cu conjugatul numitorului.

Conjugatul lui (a + b) este (a - b) sau conjugatul lui (a - b) este (a + b)

Ex. a) $\dfrac{2\sqrt{27}}{3\sqrt{32}} = \dfrac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4_2\sqrt{2}} = \dfrac{^{\sqrt{2})}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$; **b)** $\dfrac{25}{\sqrt{125}} = \dfrac{25^5}{5\sqrt{5}} = \dfrac{^{\sqrt{5})}5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \dfrac{^{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1$ **Se aplica formula $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$**

d) $\dfrac{1}{-3 + \sqrt{2}} = \dfrac{^{(\sqrt{2}+3)}1}{\sqrt{2} - 3} = \dfrac{\sqrt{2} + 3}{2 - 9} = \dfrac{\sqrt{2} + 3}{-7} = -\dfrac{\sqrt{2} + 3}{7}$

$(\sqrt{2} + 3) \cdot (\sqrt{2} - 3) = (\sqrt{2})^2 - 3^3 = 2 - 9 = -7$

e) $\dfrac{1}{-\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{1}{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \dfrac{^{\sqrt{2}-\sqrt{3})}(-1)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{-(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2 - 3} = \dfrac{-(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{-1} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

5. Radicali compuși.

Apar in situatia cand sub un radical se afla alt radical si un numar intreg sub forma unei sume algebrice.
Ideea de baza este de a scrie acea suma ca un patrat perfect ca sa o pot scoate de sub radicalul principal.
O sa incerc sa explic una din metodele de rezolvare fara a folosii formula directa. Acest tip de exercitiu va fi aprofundat in clasele de liceu.
Pornim de la formulele: $\mathbf{a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2}$ **si** $\mathbf{a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2}$

Sa luam cateva exemple:

1) $\mathbf{5 - 2\sqrt{6}}$ Trebuie sa gasim 2 numere **a** si **b** care sa satisfaca conditiile:

$\mathbf{a \cdot b = \sqrt{6}}$ si $\mathbf{a^2 + b^2 = 5}$

Mai simplu: ne gandim la 2 numere care *inmultite* sa dea *6* si *adunate* sa dea *5*

Numerele sunt **2** si **3** $\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{2}}$ si $\mathbf{b = \sqrt{3} \Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

2) $\mathbf{8 + 2\sqrt{15}}$ Cautam 2 numere care **inmultite** sa dea **15** si **adunate** sa dea **8**

Numerele sunt **3** si **5** $\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{3}}$ si $\mathbf{b = \sqrt{5} \Rightarrow 8 + 2\sqrt{15} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}$

3) $\mathbf{6 - 4\sqrt{2}}$ **ATENTIE!** la aceasta situatie. Daca in fata radicalului **nu este 2** ci un multiplu de 2, atunci numarul se scrie ca $\mathbf{2 \cdot n}$ **iar n se ridica la patrat si se introduce sub radical**

In cazul nostru $\mathbf{4\sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{8}}$

Deci $\mathbf{6 - 4\sqrt{2}}$ **DEVINE** $\mathbf{6 - 2\sqrt{8}}$

Acum ne gandim la doua numere care ***inmultite*** sa dea **8** si ***adunate*** sa dea **6**

Numerele sunt **4** si **2** $\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{4}}$ si $\mathbf{b = \sqrt{2} \Rightarrow 6 - 2\sqrt{8} = (\sqrt{4} - \sqrt{2})^2 = (2 - \sqrt{2})^2}$

4) $\mathbf{8 + \sqrt{48}}$ **ATENTIE!** la aceasta situatie. Daca in fata radicalului **nu este numar** atunci trebuie **sa scoatem 2 de sub radical**. Numarul de sub radical se imparte la 4 (deoarece $\sqrt{4} = 2$)

In cazul nostru $\mathbf{\sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = 2\sqrt{12}}$

Deci $\mathbf{8 + \sqrt{48}}$ **DEVINE** $\mathbf{8 + 2\sqrt{12}}$

Acum ne gandim la doua numere care ***inmultite*** sa dea **12** si ***adunate*** sa dea **8**

Numerele sunt **2** si **6** $\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{2}}$ si $\mathbf{b = \sqrt{6} \Rightarrow 8 + 2\sqrt{12} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}$

Mai sunt si alte situatii "mai complicate" dar am precizat de la inceput ca voi prezenta materia doar la nivel mediu. Pentru aprofundare, consultati alte surse, sau prezentati situatia pe forum.
Inainte de a continua cu exemple mai fac 2 precizari importante:

1. O paranteza ridicata la puterea a doua iese de sub radical in **modul**. **Ex:** $\mathbf{\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}|}$
2. Cand scot din modul 2 numere mai intai se scrie numarul mai mare, se pune semnul care este intre ele, apoi se scie numarul mai mic. **Ex:** $\mathbf{|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $\mathbf{|5-\sqrt{24}| = 5 - \sqrt{24}}$ (deoarece $5 > \sqrt{24}$)

Ex. **a)** $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 - 2 \cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{18}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{2}\sqrt{9}} = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{9})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{9}| = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{7 - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - \sqrt{4}\sqrt{12}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}\sqrt{4}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{4})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{4}| = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$