

L1. FUNCTIA DE GRADUL I - PROBLEME REZOLVATE

1. Fie functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1)x - 3m + 4$, $m \in [3; +\infty)$.

a) Determinati valorile lui m pentru care punctul $A(m; m - 2) \in G_f$

b) Pentru $m = 3$, trasati graficul functiei

c) Pentru $m = 3$, determinati punctele din grafic in care ordonata este 75% din abscisa

d) Pentru $m = 3$, calculati tangenta unghiului dintre graficul functiei si abscisa.

e) Daca $f(x) = 2x - 5$, calculati $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$

REZOLVARE

a) Daca $A(m; m - 2) \in G_f \Rightarrow f(m) = m - 2$ (1)

Calculiez $f(m) \Rightarrow f(m) = (m - 1) \cdot m - 3m + 4 = m^2 - m - 3m + 4 \Rightarrow f(m) = m^2 - 4m + 4$ (2)

Inlocuiesc relatia (2) in relatia (1) $\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = m - 2 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - m + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$ (3)

Rezolv ecuatia (3) $\Rightarrow m^2 - 3m - 2m + 6 = 0 \Rightarrow m(m - 3) - 2(m - 3) = 0 \Rightarrow (m - 3) \cdot (m - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$ si $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

Deoarece $m \in [3; +\infty) \Rightarrow m = 3$ ($2 \notin [3; +\infty)$)

b) Pentru $m = 3 \Rightarrow f(x) = (3 - 1) \cdot x - 3 \cdot 3 + 4 = 2x - 9 + 4 \Rightarrow f(x) = 2x - 5$

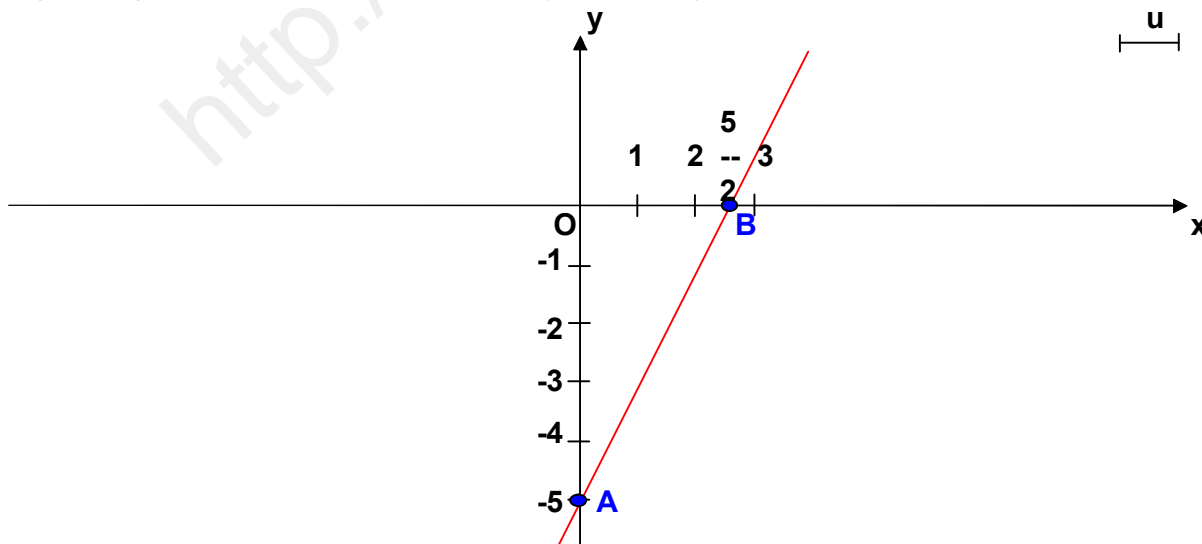
Intocmesc tabelul de valori:

x	$-\infty$	$\left(\begin{array}{c} 0 \\ -5 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 5 \\ \text{-----} \\ 2 \end{array} \right)$	$+\infty$
$f(x)$		$\left(\begin{array}{c} -5 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right)$	
		A	B	

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 - 5 \Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow A(0; -5)$

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow B(\frac{5}{2}; 0)$

Reprezint punctele in sistemul de axe xOy si trasez graficul functiei



c) Notez punctul cu $M(x, f(x))$

$$\text{Daca ordonata este } 75\% \text{ din abscisa} \Rightarrow f(x) = 75\% \cdot x \Rightarrow 2x - 5 = \frac{75}{100} \cdot x \Rightarrow 2x - 5 = \frac{3}{4} \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 4 \cdot (2x - 5) \Rightarrow 3x = 8x - 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 \Rightarrow f(4) = 3 \Rightarrow M(4; 3)$$

d) Unghiul dintre dreapta care reprezinta graficul functiei si abscisa este $\angle(OBA)$

$$\text{In } \triangle AOB \text{ dr. in } O \Rightarrow \text{tg } \angle(OBA) = \frac{|OA|}{|OB|} \Rightarrow \text{tg } \angle(OBA) = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{5} = 2 \Rightarrow \text{tg } \angle(OBA) = 2$$

e) $f(x) = 2x - 5$

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) &= 2 \cdot 1 - 5 + 2 \cdot 2 - 5 + 2 \cdot 3 - 5 + \dots + 2 \cdot 100 - 5 = \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 100 + (-5) \cdot 100 = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) - 500 = \\ &= 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} - 500 = 10100 - 500 = 9600 \end{aligned}$$

2. Fie functia liniara $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care indeplineste conditia $f(x - 1) = -2x + 2 + 2 \cdot f(1)$.

a) Aratati ca $f(x) = -2x + 4$

b) Reprezentati grafic functia f

c) Aflati aria triunghiului determinat de axele de coordonate cu graficul functiei f

d) Determinati punctele $M(m, n)$ de pe grafic care indeplinesc conditia $|m| = |n|$

e) Determinati $x \in \mathbb{Z}^*$ astfel incat $|x - 1| \leq -2 - f(4)$

REZOLVARE

a) Scriu forma generala a functiei liniare $f \Rightarrow f(x) = ax + b$

$$\text{Calculez } f(x - 1) \text{ si } f(1) \Rightarrow f(x - 1) = a \cdot (x - 1) + b = ax - a + b ; f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$

$$\text{Inlocuiesc in expresia initiala valorile determinate} \Rightarrow ax - a + b = -2x + 2 + 2 \cdot (a + b) \Rightarrow$$

$$ax - a + b = -2x + 2 + 2a + 2b \Rightarrow ax - a + b - 2a - 2b = -2x + 2 \Rightarrow ax - 3a - b = -2x + 2$$

Egalez termenul lui x din stanga cu termenul lui x din dreapta si termenul liber din stanga cu termenul

$$\text{liber din dreapta} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -3a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -3 \cdot (-2) - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 6 - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Inlocuiesc pe } a \text{ si } b \text{ in forma generala a functiei} \Rightarrow f(x) = -2x + 4$$

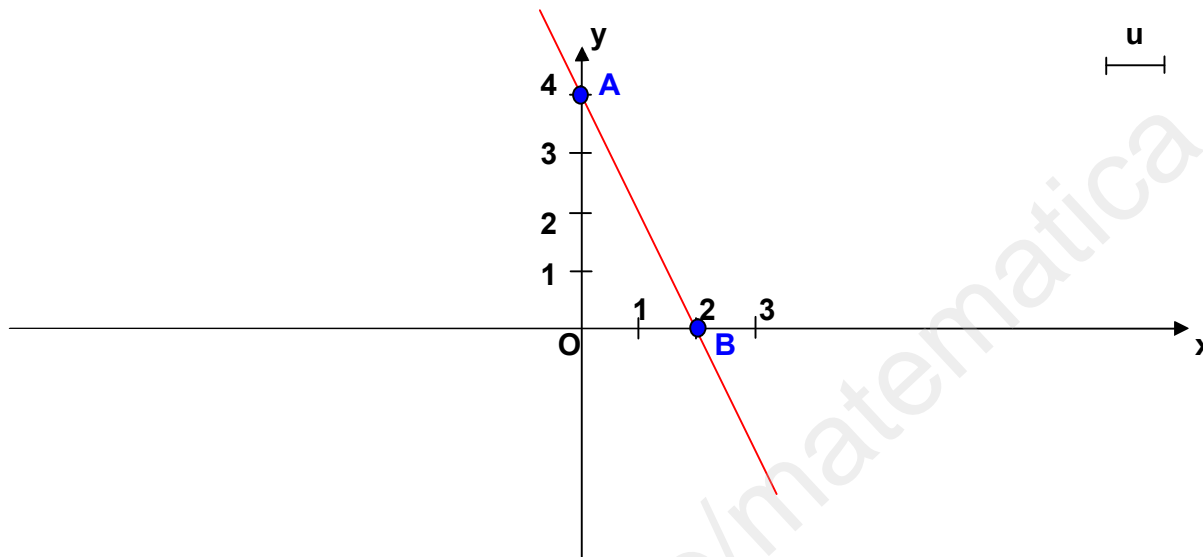
b) Intocmesc tabelul de valori

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f(x)		4	0	
		A	B	

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \cdot 0 + 4 \Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow A(0; 4)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2; 0)$$

Reprezint punctele determinate in sistemul de axe xOy si trasez graficul functiei



d) Suprafata dintre graficul functiei si axele de coordonate este triunghiul AOB.

$$\text{Aria } \triangle AOB \text{ dr} = \frac{|AO| \cdot |OB|}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ unitati de arie} \Rightarrow \text{Aria } \triangle AOB = 4 \text{ ua}$$

d) $M(m, n)$; $|m| = |n|$; $f(x) = -2x + 4$

$$\text{Daca punctul } M(m, n) \in Gf \Rightarrow f(m) = n \Rightarrow |f(m)| = |n|, \text{ dar } |m| = |n| \Rightarrow |f(m)| = |m| \quad (1)$$

$$\text{Calculez } f(m) \Rightarrow f(m) = -2 \cdot m + 4 \Rightarrow f(m) = -2m + 4$$

$$\text{Inlocuiesc pe } f(m) \text{ in relatia (1)} \Rightarrow |-2m + 4| = |m| \Rightarrow m = -2m + 4 \text{ si } m = 2m - 4$$

$$m = -2m + 4 \Rightarrow m + 2m = 4 \Rightarrow 3m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

$$m = 2m - 4 \Rightarrow m - 2m = -4 \Rightarrow -m = -4 \Rightarrow m = 4$$

e) $|x - 1| \leq -2 - f(4)$ (1)

$$\text{Calculez } f(4) \Rightarrow f(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -8 + 4 = -4$$

$$\text{Inlocuiesc pe } f(4) \text{ in relatia (1)} \Rightarrow |x - 1| \leq -2 - (-4) \Rightarrow |x - 1| \leq -2 + 4 \Rightarrow |x - 1| \leq 2 \Rightarrow$$

$$-2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -2 + 1 \leq x \leq 2 + 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-1; 3]$$

Deoarece $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x \in \{-1, 1, 2, 3\}$.