

N. FRAȚII ALGEBRICE - PROBLEME REZOLVATE

a) Simplificați:

$$1) \frac{2x^2 - 5x - 12}{2x^2 - 9x + 4}$$

REZOLVARE

Descompun separat numărătorul și numitorul fracției utilizând metodele prezentate anterior.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)(2x + 3)$$

$$2 \cdot (-12) = -24 ; (-8) \cdot (+3) = -24 \text{ și } -8 + 3 = -5 \Rightarrow -5x = -8x + 3x$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 2x^2 - 8x - x + 4 = 2x(x - 4) - (x - 4) = (x - 4)(2x - 1)$$

$$2 \cdot (+4) = +8 \Rightarrow (-8) \cdot (-1) = +8 \text{ și } -8 - 1 = -9 \Rightarrow -9x = -8x - x$$

$$\frac{2x^2 - 5x - 12}{2x^2 - 9x + 4} = \frac{(x - 4)(2x + 3)}{(x - 4)(2x - 1)} = \frac{2x + 3}{2x - 1}$$

$$2) \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

REZOLVARE

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 1)(x + 1)}{(x + 2)(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$3) \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9) + 15}{(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 6) + 6}$$

REZOLVARE

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9) + 15 = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1 + 8) + 15$$

$$\text{Notez } x^2 - x + 1 = a \Rightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9) + 15 = a(a + 8) + 15 \Rightarrow$$

$$a(a + 8) + 15 = a^2 + 8a + 15 = a^2 + 3a + 5a + 15 = a(a + 3) + 5(a + 3) = (a + 3)(a + 5)$$

$$\text{Inlocuiesc pe } a \text{ cu } x^2 - x + 1 \Rightarrow (a + 3)(a + 5) = (x^2 - x + 1 + 3)(x^2 - x + 1 + 5) = (x^2 - x + 4)(x^2 - x + 6)$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 6) + 6 = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1 + 5) + 6$$

$$\text{Notez } x^2 - x + 1 = a \Rightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 6) + 6 = a(a + 5) + 6 \Rightarrow$$

$$a(a + 5) + 6 = a^2 + 5a + 6 = a^2 + 2a + 3a + 6 = a(a + 2) + 3(a + 2) = (a + 2)(a + 3)$$

$$\text{Inlocuiesc pe } a \text{ cu } x^2 - x + 1 \Rightarrow (a + 2)(a + 3) = (x^2 - x + 1 + 2)(x^2 - x + 1 + 3) = (x^2 - x + 3)(x^2 - x + 4)$$

$$\frac{(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 9) + 15}{(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 6) + 6} = \frac{(x^2 - x + 4)(x^2 - x + 6)}{(x^2 - x + 3)(x^2 - x + 4)} = \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - x + 3}$$

b) Efectuați:

$$1) \frac{x-2}{x+1} + \frac{x-1}{2-x} + \frac{3}{x^2-x-2}$$

In prima etapa: descompun (acolo unde este cazul) numitorii fractiilor

$$x^2 - x + 2 = x^2 - 2x + x - 2 = x(x-2) + (x-2) = (x-2)(x+1) \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{x-1}{2-x} + \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

In a doua etapa: observ daca necunoscutele de la numitori sunt "pe aceeași poziție"

Deoarece la al doilea numitor $2-x$ trebuie să schimb x cu 2 , scot semnul $(-)$ în factor comun \Rightarrow

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)(x-2) - (x+1)(x-1) + 3}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)^2 - (x^2-1) + 3}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 1 + 3}{(x-2)(x+1)} = \frac{-4x + 8}{(x-2)(x+1)} = \frac{-4(x-2)}{(x-2)(x+1)} = -\frac{4}{x+1}$$

$$2) \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2 \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-9}$$

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3 = x(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1)$$

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 3x + x + 3 = x(x+3) + (x+3) = (x+3)(x+1)$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} \cdot \frac{(x-3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$3) \left(\frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{x-1}{x^2+2x} \right) : \frac{4x^2+8}{x^2-4}$$

$$\left[\frac{x+1}{x(x-2)} + \frac{x-1}{x(x+2)} \right] \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{4(x^2+2)} = \frac{(x+2)(x+1) + (x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{4(x^2+2)} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 2x + 2 + x^2 - x - 2x + 2}{4x(x^2+2)} = \frac{2x^2 + 4}{4x(x^2+2)} = \frac{2(x^2+2)}{4x(x^2+2)} = \frac{1}{2x}$$