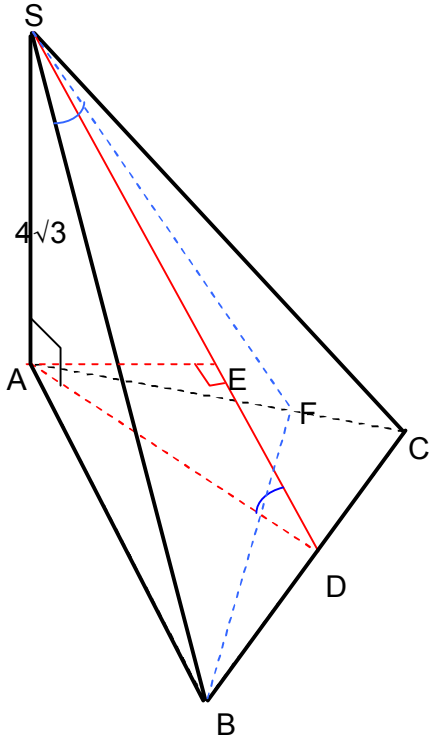
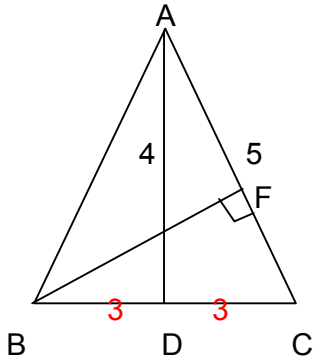
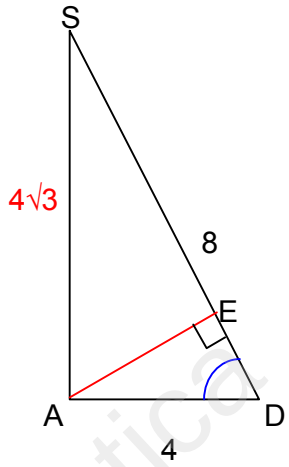
F. DISTANTE SI UNGHIURI IN SPATIU - PROBLEME REZOLVATE

1.ABC triunghi isoscel cu perimetrul P=16 cm si BC=6cm.Se ridica perpendiculara AS=4√3 cm
Se cere: a) d(S; BC) ; b) d(A ; (SBC)) ; c) m∠((SBC);(ABC)) ; d) sin∠(SB; (SAC))







REZOLVARE

a) In ΔABC isoscel $AB = AC = \frac{P_{\Delta ABC} - BC}{2} = \frac{16 - 6}{2} = 5$ cm $\Rightarrow$ **AB = AC = 5 cm**

In ΔADC dr. $\Rightarrow AD^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow AD^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AD = \sqrt{16} \Rightarrow$ **AD = 4 cm**

Distanta de la punctul D la segmentul BC se determina cu Teorema celor 3 perpendiculare

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{S}A \perp (ABC) \\ A\mathbf{D} \perp BC \\ AD\ ,\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SD \perp BC$$

In ΔSAD dr. $\Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 48 + 16 = 64 \Rightarrow SD = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow$ **d(S, BC) = 8 cm**

b) Distanta de la punctul A la planul (SBC) se poate determina prin 2 metode:

Metoda1

$$\left.\begin{array}{l} SD \perp BC \\ AD \perp BC \\ SD,\ AD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAD)$$

Construiesc $AE \perp SD$. Deoarece $BC \perp (SAD)$ si $AE \subset (SAD) \Rightarrow BC \perp AE \Rightarrow AE \perp BC$

Din $$\left.\begin{array}{l} AE \perp SD \\ AE \perp BC \\ SD,\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow$$ **d(A, (SBC)) = AE**

In Δ SAD dr. $\Rightarrow AE = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ **d(A, (SBC)) = 2√3 cm**

http://eprofu.ro/matematica

Metoda2

d(A , (SBC)) . Formez intre punct si plan piramida ASBC si scriu volumul ei in doua moduri

$$\left.\begin{aligned} V_{ASBC} &= \frac{\text{Aria } \Delta SBC \cdot \text{distanta d}}{3} \\ V_{SABC} &= \frac{\text{Aria } \Delta ABC \cdot SA}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Aria } \Delta SBC \cdot \text{distanta d} = \text{Aria } \Delta ABC \cdot SA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{distanta d} = \frac{\text{Aria } \Delta ABC \cdot SA}{\text{Aria } \Delta SBC}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Aria } \Delta ABC &= \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2 \\ \text{Aria } \Delta SBC &= \frac{BC \cdot SD}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \quad d = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{24} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{d(A, (SBC)) = 2\sqrt{3} \text{ cm}}$$

c) $m\angle((SBC);(ABC))$

Se identifica latura comuna dintre cele 2 plane, apoi din fiecare plan se duce cate o perpendiculara pe latura comuna. Unghiul dintre plane este egal cu unghiul dintre cele 2 perpendiculare.

$$\left.\begin{aligned} &(SBC) \cap (ABC) = BC \\ &SD \perp BC, SD \subset (SBC) \\ &AD \perp BC, AD \subset (ABC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle((SBC); (ABC)) = \angle(SD ; AD) = \angle SDA$$

In ΔSAD dr. cu $AD = \frac{SD}{2} \Rightarrow m\angle(ASD)=30°$(reciproca teoremei unghiului de 30°) $\Rightarrow \mathbf{m\angle(SDA) = 60°}$

d) Unghiul dintre o drepata si un plan = unghiul dintre dreapta si proiectia dreptei pe plan

Construiesc $BF \perp AC$, dar $BF \perp SA$ ($SA \perp (ABC)$ si $BF \subset (ABC)$) $\Rightarrow BF \perp (SAC) \Rightarrow$
$\Rightarrow$proiectia segmentului SB pe planul (SAC) este segmentul SF $\Rightarrow \angle(SB, (SAC))=\angle(SB, SF)=\angle(BSF)$

$$\text{In } \Delta ABC \Rightarrow BF \cdot AC = AD \cdot BC \Rightarrow BF = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

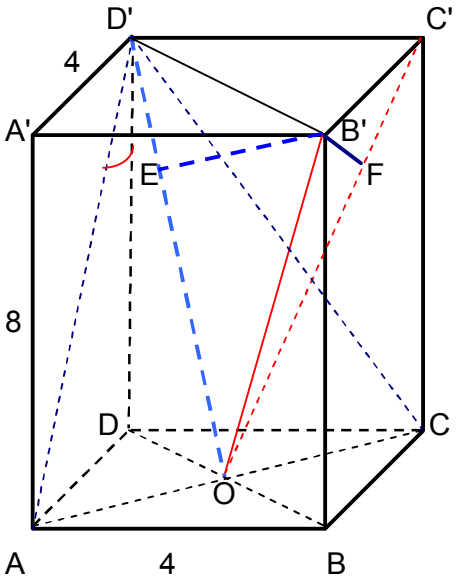
$$\text{In } \Delta SAB \text{ dr} \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = (4\sqrt{3})^2 + 5^2 = 48 + 25 = 73 \Rightarrow SB = \sqrt{73} \text{ cm}$$

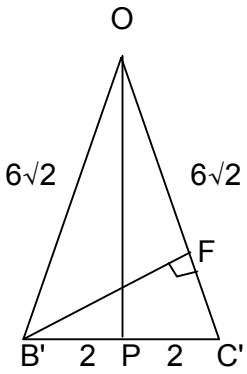
$$\text{In } \Delta SFB \text{ dreptunghic in F} \Rightarrow \sin\angle(BSF) = \frac{BF}{SB} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{73}} = \frac{24\sqrt{73}}{365} \Rightarrow \mathbf{\sin\angle(SB, (SAC)) = \frac{24\sqrt{73}}{365}}$$

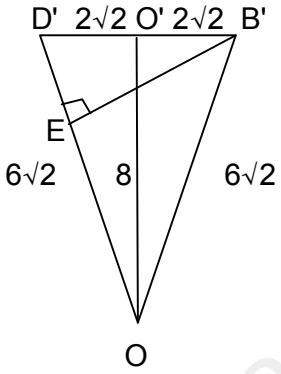
http://eprofu.ro/matematica

2. ABCDA'B'C'D' este o prisma drepta cu baza ABCD patrat. AB= 4cm ; AA'=8cm. Se cere:

a) d(D'; AC) ; b) d(B'; OC') ; c) d(B';(D'AC)) ; d) cos ∠(D'A ; C'C)







a) Distanta de la D' la AC o determin cu ajutorul teoremei celor 3 perpendiculare

D'D ⊥ (ABCD)
D**O** ⊥ AC
DO, AC ⊂ (ABCD)
} ⇒ D'O ⊥ AC ⇒ **d(D' ; AC) = D'O**

DB =L√2 = 4√2 cm ⇒ DO = 4√2 / 2 = 2√2 cm

In ΔD'DO dr ⇒ $D'O^2 = D'D^2 + DO^2 = 8^2 + (2\sqrt{2})^2 = 64 + 8 = 72$ ⇒ D'O =√72 ⇒ **D'O = 6√2 cm**

b) Distanta de la B' la OC' o voi determina prin alta metoda decat cea utilizata la punctul **a)**

Intre punctul B' si segmentul OC' formez triunghiul B'OC'

Observ natura triunghiului (dupa lungimile laturilor), apoi reprezint triunghiul in plan

ΔB'BO ≡ ΔC'CO (cazul cateta-cateta)⇒ B'O ≡ C'O ⇒ ***ΔB'OC' este isoscel***

In ΔB'OC' construiesc B'F ⊥ OC' ⇒ **d(B' ; OC') = B'F**

In ΔB'OC' ⇒ B'F · OC' = OP · B'C' ⇒ $B'F = \dfrac{OP \cdot B'C'}{OC'}$

OC'=OB' dar OB'= OD' ⇒ OC'=OD'=6√2 cm ;

In ΔOPB' dr ⇒ $OP^2 = B'O^2 - B'P^2 = 72 - 4 = 68$ ⇒ OP = √68 = 2√17 cm

$B'F = \dfrac{2\sqrt{17} \cdot 4}{6\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{34}}{6} = \dfrac{2\sqrt{34}}{3}$ ⇒ **d(B' ; OC') = $\dfrac{2\sqrt{34}}{3}$**

http://oboflori.ro/matematica

c) d(B';(D'AC))

$$\left.\begin{array}{l} B'O \perp AC \\ D'O \perp AC \\ B'O,\ D'O \subset (D'OC') \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (D'OB')$$

Construiesc $B'E \perp D'O$. Deoarece $AC \perp (D'OB')$ si $B'E \subset (D'OB') \Rightarrow AC \perp B'E \Rightarrow B'E \perp AC$

$$\text{Din} \quad \left.\begin{array}{l} B'E \perp D'O \\ B'E \perp AC \\ D'O,\ AC \subset (D'AC) \end{array}\right\} \Rightarrow B'E \perp (D'AC) \Rightarrow \mathbf{d(B', (D'AC)) = B'E}$$

$$\text{In } \Delta D'OB' \Rightarrow B'E \cdot D'O = OO' \cdot D'B' \Rightarrow \mathbf{B'E} = \frac{OO' \cdot D'B'}{D'O} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{32}{6} = \mathbf{\frac{16}{3}}\ \mathbf{cm}$$

D'B' este diagonala unui patrat (diagonala patratului = latura $\cdot \sqrt{2} \Rightarrow D'B' = A'B' \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

d) cos ∠(D'A ; C'C)

Daca dreptele (1) si (2) nu sunt in acelasi plan, se duce o paralela (3) la dreapta (1) care sa fie in acelasi plan cu drepta (2). Unghiul dintre dreptele (1) si (2) va fi egal cu unghiul dintre dreptele (2) si (3).

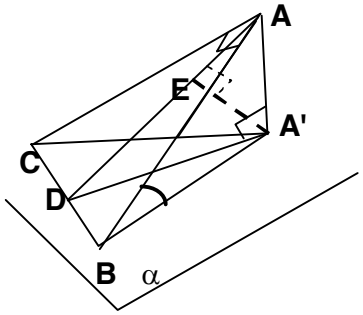
$D'D \parallel C'C \Rightarrow \angle(D'A\ ;\ CC') = \angle(D'A\ ;\ D'D) = \angle(AD'D)$

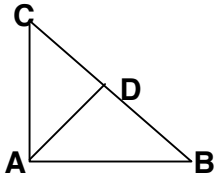
$$\text{In } \Delta\ D'DA \text{ dr.} \Rightarrow \cos \angle(AD'D) = \frac{D'D}{D'A}$$

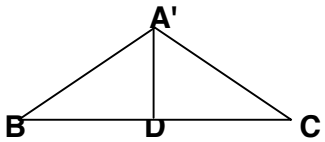
$$\text{In } \Delta\ D'DA \text{ dr.} \Rightarrow D'A^2 = D'A'^2 + A'A^2 \Rightarrow D'A^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow D'A = \sqrt{80} \Rightarrow \mathbf{D'A = 4\sqrt{5}\ cm}$$

$$\cos \angle(AD'D) = \frac{D'D}{D'A} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \mathbf{\cos\angle(AD'D) = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

3) Triunghiul dreptunghic isoscel are ipotenuza BC conținută în planul α și se proiectează pe acest plan după A'BC. Știind că aria ΔA'BC este $3\sqrt{3}$ cm² și că BC = 6cm, să se afle:
a) înălțimea A'D (D∈ BC) a triunghiului BA'C ; b) cosinusul unghiului format de AB cu planul α ; c) distanța de la A' la planul ABC ; d) unghiul dintre planele (AA'B) si (AA'D)







$AA' \perp \alpha$; $BC \subset \alpha \Rightarrow$ CA' este proiectia lui CA pe α
BA' este proiectia lui BA pe α
Deoarece ΔABC este dreptunghic isoscel ⇒ AB = AC
Daca AB=AC ⇒ A'B=A'C ⇒ ΔA'BC este isoscel

http://eprofu.ro/matematica

a) Aria $\Delta A'BC = \frac{BC\cdot A'D}{2} \Rightarrow \frac{6\cdot A'D}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ **$A'D = \sqrt{3}$ cm**

In $\Delta A'DC$, $\angle D=90° \Rightarrow A'C^2 = A'D^2+DC^2 = 3+9=12 \Rightarrow$ **$A'C = 2\sqrt{3}cm = A'B$**

In ΔABC, $\angle A=90° \Rightarrow AC^2+AB^2=BC^2 \Rightarrow 2\cdot AC^2=36 \Rightarrow AC^2=18 \Rightarrow$ **$AC = 3\sqrt{2}$ cm = AB**

ΔABC dreptunghic isoscel , AD-inaltime $\Rightarrow$ AD-mediana $\Rightarrow AD = BC / 2 \Rightarrow$ **AD=3cm**

In $\Delta AA'B$, $\angle A'=90° \Rightarrow A'A^2 = AB^2-A'B^2 = 18-12=6 \Rightarrow$ **$A'A = \sqrt{6}$cm**

b) A'B este proiectia lui AB pe planul $\alpha \Rightarrow \angle(AB ; \alpha) = \angle(AB; A'B)= \angle ABA'$

In $\Delta AA'B$, $\angle A'=90° \Rightarrow \cos(\angle ABA') = \frac{A'B}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} =$ **$\frac{\sqrt{6}}{3}$**

c) distanța de la A' la planul ABC

Voi utiliza o noua metoda pentru a determina distanta de la un punct la un plan

1. Din A' duc o perpendiculara pe o dreapta a planului (ABC), drepta care este in acelasi plan cu punctul A'

$A'D \perp BC$

2. Din puctul D construiesc o perpendicuara pe BC care sa fie inclusa in planul (ABC)

$DA \perp BC$

3. Din punctul A' construiesc o pependiculara pe DA

$A'E \perp AD$

Daca $A'D \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'DA)$, dar $A'E \subset (A'DA) \Rightarrow BC \perp A'E \Rightarrow$ **$A'E \perp BC$**
$DA \perp BC$

Deoarece **$A'E \perp AD$**
$A'E \perp BC$
AD si **$BC \subset (ABC)$** $\Rightarrow$ **$A'E \perp (ABC) \Rightarrow d(A' ; (ABC)) = A'E$**

O dreapta este perpendiculara pe un plan daca este perpendiculara pe doua drepte concurente din acel plan.

In $\Delta AA'D$, $\angle A'=90°$, $A'E \perp AD \Rightarrow A'E = \frac{A'A\cdot A'D}{AD} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ **$A'E=\sqrt{2}cm$**

d) $(AA'B)\cap(AA'D) = AA'$
$BA' \perp AA'$; $BA' \subset (AA'B)$
$DA' \perp AA'$; $DA' \subset (AA'D)$
$\Rightarrow \angle((AA'B);(AA'D))=\angle(BA' ; DA')=\angle(BA'D)$

In $\Delta A'DB$, $\angle D=90°$,$A'D=\sqrt{3}cm$, $A'B=2\sqrt{3}cm \Rightarrow A'D = \frac{A'B}{2} \Rightarrow m(\angle A'BD)=30 \Rightarrow$ **$m(\angle BA'D)=60°$**

http://eprofu.ro/matematica