

M. CALCULE ALGEBRICE

1. Formule de calcul prescurtat:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ • $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ • $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ • $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Forma canonică a unui polinom este scrierea termenilor în ordine descrescătoare a puterilor

3. Gradul unui polinom este cel mai mare grad al monoamelor componente

4. Valoarea numerică a unui polinom este numărul care se obține înlocuind necunoscutele cu numere date.

Ex. Fie $P(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^3$. Calculați $P(2;3)$. $P(2;3) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3^3 = 8 - 12 + 27 = 23$

5. Operații cu polinoame.

a) Adunarea și scăderea polinoamelor.

- Se adună sau scad numai termenii asemenea

Ex. Fie $P(x) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$; $Q(x) = 4x^2 - 5xy - 2y^2$; $R(x) = 3x^3 - 4xy + 2y^2$

Calculați $P(x) - Q(x) + R(x) \Rightarrow (2x^2 - 3xy + 4y^2) - (4x^2 - 5xy - 2y^2) + (3x^3 - 4xy + 2y^2) =$
 $= \underline{2x^2} - 3xy + \underline{4y^2} - \underline{4x^2} + 5xy + \underline{2y^2} + \underline{3x^3} - 4xy + \underline{2y^2} = 3x^3 - 2x^2 + 8y^2 - 2xy.$

b) Înmulțirea polinoamelor

- Se înmulțesc termenii între ei (numerele între ele și necunoscutele între ele), după care se face suma algebrică a termenilor asemenea.

Fie $P(x)=3x^2-5xy^2+4y^2$ și $Q(x)=2x^3-3x^2y+2y^2$. Efectuați $P(x) \cdot Q(x) \Rightarrow (3x^2-5xy^2+4y^2) \cdot (2x^3-3x^2y+2y^2) =$
 $= 3x^2 \cdot 2x^3 - 3x^2 \cdot 3x^2y + 3x^2 \cdot 2y^2 - 5xy^2 \cdot 2x^3 + 5xy^2 \cdot 3x^2y - 5xy^2 \cdot 2y^2 + 4y^2 \cdot 2x^3 - 4y^2 \cdot 3x^2y + 4y^2 \cdot 2y^2 =$
 $= 6x^5 - 9x^4y + 6x^2y^2 - 10x^4y^2 + 15x^3y^3 - 10xy^4 + 8x^3y^2 - 12x^2y^3 + 8y^4 =$
 $= 6x^5 - 9x^4y + 6x^2y^2 - 10x^4y^2 + 15x^3y^3 - 10xy^4 + 8x^3y^2 - 12x^2y^3 + 8y^4$

6. Descompunerea polinoamelor în factori.

6.1. Descompunerea prin metoda factorului comun

1) $36a^2b^2c^2 - 12a^2bc^3 + 48a^3b^3c = 12a^2bc \cdot (3bc - c^2 + 4ab^2)$

2) $4a(a+1) + (a+1)^2 - 5(a+1) = (a+1)(4a + a+1 - 5) = (a+1)(5a-4)$

3) $3x(4x+7) - 9x(4x+7)^2 = 3x(4x+7)(1 - 3(4x+7)) = 3x(4x+7)(1-12x-21) = -12x(4x+7)(4x+5)$

6.2. Descompunerea prin gruparea termenilor

$$1) a^2+b^2+2ab-a-b = (a^2+2ab+b^2) - (a+b) = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$$

$$2) x-y+xy-1 = x+xy - y-1 = x(1+y) - (1+y) = (1+y)(x-1)$$

$$3) 4x-y+4-xy = 4x+4 - y-xy = 4(x+1) - y(1+x) = (x+1)(4-y)$$

6.3. Descompunerea polinomului de gradul II de forma $ax^2 + bx + c$

♣ Descompunerea polinoamelor de gradul 2 la care coeficientul lui x^2 este 1

a) se descompune termenul din mijloc (cel cu x) in suma algebrica de 2 termeni

- cei 2 termeni trebuie sa aiba proprietatile: daca le inmultim sa obtinem ca rezultat termenul liber
daca le adunam sa obtinem ca rezultat termenul lui x

-daca termenul liber este - pozitiv \Rightarrow termenii cautati au acelasi semn (Ex.1, Ex.2)

- negativ \Rightarrow termenii cautati au semne opuse (Ex.3, Ex.4)

- daca termenul lui x este - pozitiv \Rightarrow din termenii cautati cel mai mare este pozitiv (Ex.3)

-negativ \Rightarrow din termenii cautati cel mai mare este negativ (Ex.4)

(proprietate valabila doar in cazul in care termenul liber este negativ)

b) dupa ce se scrie termenul lui x ca suma de 2 termeni se grupeaza primii 2 termeni intre ei si urmatorii 2 termeni intre ei , se scoate din fiecare grupare un factor comun, apoi se scoate factorul comun din cele 2 grupari

$$1) x^2+7x+12 = x^2+3x+4x+12 = x(x+3) + 4(x+3) = (x+3)(x+4)$$

termenii sunt +3 si +4 ; $(+3) \cdot (+4) = 12$ si $+3 + 4 = +7$

$$2) x^2-5x+6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

termenii sunt -2 si -3 ; $(-2) \cdot (-3) = 6$ si $-2 - 3 = -5$

$$3) x^2+5x-14 = x^2+7x-2x-14 = x(x+7) - 2(x+7) = (x+7)(x-2)$$

termenii sunt +7 si -2 ; $(+7) \cdot (-2) = -14$ si $+7 - 2 = +5$

$$4) x^2-x-30 = x^2-6x+5x-30 = x(x-6) + 5(x-6) = (x-6)(x+5)$$

termenii sunt -6 si +5 ; $(-6) \cdot (+5) = -30$ si $-6 + 5 = -1$

♣ Descompunerea polinoamelor de gradul 2 la care coeficientul lui x^2 este diferit de 1

Rezolvarea se face ca in cazul anterior cu deosebirea ca inainte de a cauta termenii se inmulteste termenul liber cu numarul din fața lui x.

$$1) 3x^2 + 7x - 6 = 3x^2 + 9x - 2x - 6 = 3x(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(3x - 2)$$

$3 \cdot (-6) = -18 \Rightarrow$ termenii sunt +9 si -2 ; $(+9) \cdot (-2) = -18$ si $+9 - 2 = +7$

$$2) 4x^2 - 21x + 5 = 4x^2 - 20x - x + 5 = 4x(x - 5) - (x - 5) = (x - 5)(4x - 1)$$

$4 \cdot (+5) = +20 \Rightarrow$ termenii sunt -20 si -1 ; $(-20) \cdot (-1) = -20$ si $-20 - 1 = -21$

6.4. Descompunerea polinoamelor utilizând formulele de calcul prescurtat

1) $P(x) = 16x^2 - 9 \Rightarrow P(x) = (4x)^2 - (3)^2 = (4x - 3)(4x + 3)$

2) $P(x) = 25x^4 - 4y^4 \Rightarrow P(x) = (5x^2)^2 - (2y^2)^2 = (5x^2 - 2y^2)(5x^2 + 2y^2) = (\sqrt{5}x - \sqrt{2}y)(\sqrt{5}x + \sqrt{2}y)(5x^2 + 2y^2)$

3) $P(x) = 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow P(x) = (3x)^2 - 12x + (2)^2 = (3x - 2)^2$

4) $P(x) = 25 - 10\sqrt{2}x + 2x^2 \Rightarrow P(x) = (5)^2 - 10\sqrt{2}x + (\sqrt{2}x)^2 = (5 - \sqrt{2}x)^2$

5) $P(x) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 6x + 5)^2 \Rightarrow P(x) = (x^2 - 1 - x^2 + 6x - 5)(x^2 - 1 + x^2 - 6x + 5) = (6x - 6)(2x^2 - 6x + 4) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(x) = 6(x-1) \cdot 2(x^2 - 3x + 2) = 12(x-1)(x-1)(x-2) \Rightarrow P(x) = 12(x-1)^2(x-2)$

6) $P(x) = (x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 2 \Rightarrow$ Notăm $x^2 + x = a \Rightarrow P(a) = a(a+1) - 2 = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$

Înlocuim pe a cu $x^2 + x \Rightarrow P(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 1)$

7) $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) + 2 \Rightarrow$ Notăm $x^2 - 1 = a \Rightarrow P(a) = a(a-3) + 2 = a^2 - 3a + 2 = (a-2)(a-1)$

Înlocuim pe a cu $x^2 - 1 \Rightarrow P(x) = (x^2 - 1 - 2)(x^2 - 1 - 1) = (x^2 - 3)(x^2 - 2) \Rightarrow P(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

8) $P(x) = 125x^3 - 8 \Rightarrow P(x) = (5x)^3 - (2)^3 = (5x - 2)(25x^2 + 10x + 4)$

9) $P(x) = 64x^3 + 27y^3 \Rightarrow P(x) = (4x)^3 + (3y)^3 = (4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$

10) $P(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \Rightarrow P(x) = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot (3)^2 - (3)^3 = (2x - 3)^3$

6.5. Descompunerea polinoamelor de gradul II utilizand ecuatia de gradul II

$$P(x) = 6x^2 - x - 1$$

♦ Mai intii se rezolva ecuatia de gradul II $6x^2 - x - 1 = 0$ si se afla solutiile x_1 si x_2

- se scriu coeficienții estfel : $a = 6$; $b = -1$; $c = -1$

- se calculează $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$

- se calculează $\sqrt{\Delta} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

- se calculează $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{1 + 5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1 - 5}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$

♦ Se înlocuiește x_1 și x_2 în relația $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow P(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{-1}{3})$

$\Rightarrow P(x) = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot 3 \cdot (x + \frac{1}{3}) = (2x - 1)(3x + 1) \Rightarrow P(x) = (2x - 1)(3x + 1)$