1.3. OPERAŢII CU NUMERE NEZECIMALE

1.3.1 OPERAŢII CU NUMERE BINARE

A. ADUNAREA NUMERELOR BINARE

Reguli de bază:

- 0 + 0 = 0 transport 0;
- 0 + 1 = 1 transport 0;
- 1 + 0 = 1 transport 0;
- 1 + 1 = 0 transport 1.

Pentru a aduna două numere binare se adună între ei biţii numerelor (începând de la dreapta la stânga) iar la acest rezultat se adaugă transportul (care poate fi 0 sau 1) conform regulilor de mai sus.

<u>Exemple de adunări cu numere binare</u>

Transport	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
A	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
B	+	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
A+B	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0

Algoritmul de realizare a adunării de mai sus:

- Se adună biţii de pe prima coloană din dreapta. Rezultatul se trece sub coloană iar transportul deasupra celei de-a doua coloane din dreapta;
- Se adună biţii de pe a doua coloană din dreapta. Rezultatul se adună cu transportul de deasupra coloanei apoi se trece rezultatul obţinut sub coloană iar transportul se trece deasupra celei de-a treia coloane din dreapta;
- Se continuă adunarea după acest algoritm până se ajunge la prima coloana din stânga.

0 + 0 = 0 transport 0
1 + 0 + 0 = 1 transport 0
1 + 1 + 0 = 0 transport 1
0 + 1 + 1 = 0 transport 1
1 + 0 + 1 = 0 transport 1 ⇒ **11011000010**
0 + 1 + 1 = 0 transport 1
0 + 0 + 1 = 1 transport 0
1 + 0 + 0 = 1 transport 0
1 + 1 + 0 = 0 transport 1
1 + 1 + 1 = 1 transport 1
1 + 0 = 1

OBSERVAȚIE: Dacă într-o adunare numărul de caractere **1** este **impar** atunci rezultatul adunării este impar, adică **1,** iar dacă este par rezultatul adunării este **0**.

Transport		0	0	0	0	0	0	0	0
A		0	1	0	0	1	1	0	0
B	+	1	0	0	1	0	0	0	1
A + B		1	1	0	1	1	1	0	1

Transport		1	1	1	1	1	1	1	0
A		0	1	1	1	1	1	1	1
B	+	0	0	1	1	1	1	1	1
A + B		1	0	1	1	1	1	1	0

B. SCĂDEREA NUMERELOR BINARE

Reguli de bază:

- 0 - 0 = 0 împrumut 0;
- 1 - 0 = 1 împrumut 0;
- 1 - 1 = 0 împrumut 0;
- 0 - 1 = 1 împrumut 1.

Pentru a scade două numere binare se scad între ei biţii numerelor (începând de la dreapta la stânga) iar din acest rezultat se scade împrumutul (care poate fi 0 sau 1) conform regulilor de mai sus.

<u>Exemple de scăderi cu numere binare</u>

Transport		0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
A		1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
B	-	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
A - B		0	0	0	1	1	0	1	0	1	0

Algoritmul de realizare a scăderii de mai sus:

- Se scad din biţii numărului A biţii numărului B de pe prima coloană din dreapta. Rezultatul se trece sub coloană iar împrumutul deasupra celei de-a doua coloane din dreapta.
- Se scad biţii de pe a doua coloană din dreapta. Din rezultat se scade împrumutul de deasupra coloanei apoi se trece rezultatul obţinut sub coloană iar împrumutul se trece deasupra celei de-a treia coloane din dreapta.
- Se continuă scăderea după acest algoritm până se ajunge la prima coloana din stânga.

Împrumut	0	0	1	1	0	0	1	1	0
A		1	1	0	0	1	1	0	0
B	-	1	0	0	1	0	0	0	1
A - B		0	0	1	1	1	0	1	1

Împrumut	0	0	0	0	0	0	1	0	0
A		1	0	1	1	1	1	0	1
B	-	1	0	0	0	0	0	1	1
A - B		0	0	1	1	1	0	1	0

Împrumut	0	1	0	1	0	1	0	1	0
A		1	0	1	0	1	0	1	0
B	-	0	1	0	1	0	1	0	1
A - B		0	1	0	1	0	1	0	1

Împrumut	0	1	1	0	0	1	1	0	0
A		1	0	0	1	1	0	0	1
B	-	0	1	1	0	0	1	1	0
A + B		0	0	1	1	0	0	1	1

C. ÎNMULŢIREA NUMERELOR BINARE

Reguli de bază:

- 0 x 0 = 0;
- 1 x 0 = 0;
- 0 x 1 = 0;
- 1 x 1 = 1.

Pentru a înmulţii două numere binare A (deînmulţit) şi B(înmulţitor) se procedează exact ca la înmulţirea a două numere zecimale:

- Se înmulţeşte pe rând fiecare cifră a înmulţitorului cu cifrele deînmulţitului;
- Se scriu rezultatele obţinute unul sub altul decalându-le cu o unitate spre stânga;
- Se adună pe verticală cifrele rezultatelor fiecărei înmulţiri *respectând regulile de adunare a numerelor binare.*

<u>Exemple de înmulţiri a numerelor binare</u>

Exemplul 1.

```
   51   |          1 1 0 0 1 1   deînmulţit
 x 13   |     x        1 1 0 1   înmulţitor
 ----   |          -----------
  153   |          1 1 0 0 1 1
 + 51   |        0 0 0 0 0 0
 ----   |      1 1 0 0 1 1       produse parţiale care se adună
  663   |  + 1 1 0 0 1 1
        |  -------------------
        | 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1    PRODUS
```

Exemplul 2.

```
   125  |            1 1 1 1 1 0 1     deînmulţit
 x  24  |      x           1 1 0 0 0   înmulţitor
 -----  |      ---------------------
   500  |            0 0 0 0 0 0 0
   250  |          0 0 0 0 0 0 0
 -----  |        0 0 0 0 0 0 0         produse parţiale care se adună
  3000  |      1 1 1 1 1 0 1
        |    1 1 1 1 1 0 1
        |    ---------------------
        | 1 0 1 1 1 0 1 1  1 0 0 0
```

D. ÎMPĂRŢIREA NUMERELOR BINARE

Algoritmul de împărţire a două numere binare are la bază metoda împărţirii a două numere întregi. Fiind dat deîmpărţitul D şi împărţitorul Î, pentru operaţia de împărţire trebuie să se determine câtul C şi restul R, astfel încât să fie satisfăcută relaţie:

D = Î x C + R

Operaţia de împărţire în cazul numerelor binare, se va reduce la o serie de scăderi ale împărţitorului din restul parţial ţinând cont de următoarele reguli:

- Dacă *restul este mai mare decât împărţitorul câtul este 1*;
- Dacă *restul este mai mic decât împărţitorul câtul este 0*.

La efectuarea scăderilor *se respectă regulile de scăderea a numerelor binare*.

<u>Exemple de împărţire a numerelor binare</u>

Exemplul 1.

```
147 | 11
11  | 13 – CÂT
----
 37
 33
----
  4 – REST
```

```
1 0 0 1 0  0 1 1 | 1 0 1 1
  1 0 1 1        | 1 1 0 1  - CÂT
---------
  0 1 1 1 0
    1 0 1 1
    -------
    0 0 1 1 1 1
        1 0 1 1
        -------
        0 1 0 0 - REST
```

Algoritmul împărţirii deîmpărţitului 10010011 la împărţitorul 1011:

- Deoarece împărţitorul 1011 este mai mare decât primii 4 biţi ai deîmpărţitului 1001 împărţitorul se va împărţii la primi 5 biţi ai deîmpărţitului 10010;
- Deoarece 10010 este mai mare decât 1011.

  Deci *primul bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub primi 5 biţi ai deîmpărţitului;
- Scădem 1011 din 10010 (respectând regulile scăderii în binar) şi obţinem restul 111;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 0 (vezi săgeata) şi obţinem restul 1110;
- Deoarece restul 1110 este mai mare decât împărţitorul 1011 câtul este 1.

  Deci *al doilea bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub restul 1110;
- Scădem 1011 din 1110 (respectând regulile scăderii în binar) şi obţinem restul 11;

- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 1 (vezi săgeata) şi obţinem restul 111;
- Deoarece restul 111 este mai mic decât împărţitorul 1011 câtul este 0.

  Deci *al treilea bit al câtului este 0*;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 1 (vezi săgeata) şi obţinem restul 1111;
- Deoarece restul 1111 este mai mare decât împărţitorul 1011 câtul este 1.

  Deci *al patrulea bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub restul 1111;
- Scădem 1011 din 1111 (respectând regulile scăderii în binar) şi obţinem restul 100.

Exemplul 2.

217	11
11	19 – CÂT
107	
99	
8 – REST	

1 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 1
1 0 1 1	1 0 0 1 1 - CÂT
0 0 1 0 1 0 0	
1 0 1 1	
0 1 0 0 1 1	
1 0 1 1	
0 1 0 0 0 - REST	

Algoritmul împărţirii deîmpărţitului 1101100 la împărţitorul 1011:

- Deoarece numărul format din primi 4 biţi ai deîmpărţitului 1101 este mai mare decât 1011.

  Deci *primul bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub primi 4 biţi ai deîmpărţitului;
- Scădem 1011 din 1101 (respectând regulile scăderii în binar) şi obţinem restul 10;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 1 (vezi săgeata) şi obţinem restul 101;
- Deoarece restul 101 este mai mic decât împărţitorul 1011 câtul este 0.

  Deci *al doilea bit al câtului este 0*;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 0 (vezi săgeata) şi obţinem restul 1010;
- Deoarece restul 1010 este mai mic decât împărţitorul 1011 câtul este 0.

  Deci *al treilea bit al câtului este 0*;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 0 (vezi săgeata) şi obţinem restul 10100;

- Deoarece restul 10100 este mai mare decât împărţitorul 1011 câtul este 1.

  Deci *al patrulea bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub restul 10100;
- Scădem 1011 din 10100 (respectând regulile scăderii) şi obţinem restul 1001;
- Coborâm bitul deîmpărţitului, care este 1 (vezi săgeata) şi obţinem restul 10011;
- Deoarece restul 10011 este mai mare decât împărţitorul 1011 câtul este 1.

  Deci *al cincilea bit al câtului este 1*;
- Înmulţim câtul 1 cu împărţitorul 1011 şi trecem rezultatul în stânga sub restul 10011;
- Scădem 1011 din 10011 (respectând regulile scăderii) şi obţinem restul 1000.

1.3.2 OPERAŢII CU NUMERE OCTALE ŞI HEXAZECIMALE

A. ADUNAREA NUMERELOR OCTALE

Reguli:

- Adunarea se face ca în sistemul zecimal, prin scrierea numerelor unul sub altul;
- Dacă prin adunarea caracterelor de pe o coloana se depăşeşte valoarea 7 numărul obţinut se scrie ca o sumă de 2 numere (un număr reprezintă baza sistemului adică 8 iar celălalt reprezintă valoarea cu care s-a depăşit baza) astfel:

  8 = 8 + 0 ; 9 = 8 + 1 ; 10 = 8 + 2 ; .... 14 = 8 + 6;
- Numărul care reprezintă *baza* (care are valoarea în octal 1) *se transportă* deasupra următoarei coloane din stânga;
- Suma cifrelor de pe coloana respectivă se adună cu transportorul de deasupra coloanei care ATENŢIE! are valoarea 1;
- Numărul care reprezintă *valoarea cu care s-a depăşit baza* este *rezultatul adunării* de pe coloana respectivă în cazul în care suma numerelor de pe coloana respectivă este mai mare decât 7;
- Dacă suma numerelor de pe o coloană este mai mică sau egală cu 7, rezultatul obţinut reprezintă *rezultatul adunării* de pe coloana respectivă.

Exemple de adunare a două numere octale

Exemplul 1.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \\ 3 & 7 & 2 & 1_8 \\ +\ 1 & 3 & 6 & 4_8 \\ \hline (5+0) & (8+3) & (8+0) & (5+0) \\ 5 & 3 & 0 & 5_8 \end{array}$$

$3721_8 + 1363_8 = 5305_8$

1 + 4 = 5 transport 0 ⇒ prima cifră (din dreapta) este 5

2 + 6 + 0 = 8 = 8 + 0 = 0 transport 1 ⇒ a doua cifră este 0

7 + 3 + 1= 11 = 8 + 3 = 3 transport 1 ⇒ a treia cifră este 3

3 + 1 + 1 = 5 transport 0 ⇒ a patra cifră este 5

Exemplul 2.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1\,7\,0\,2_8 \\ +\ 2\,1\,3\,1_8 \\ \hline 4\,0\,3\,3_8 \end{array}$$

Exemplul 3.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 5\,7\,5_8 \\ +\ 2\,7\,6_8 \\ \hline 1\ 0\,7\,3_8 \end{array}$$

Exemplul 4.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 2\,7_8 \\ +\ 7\,7_8 \\ \hline 1\ 2\ 6_8 \end{array}$$

B. SCĂDEREA NUMERELOR OCTALE

Reguli:

- Scăderea se face ca în sistemul zecimal, prin scrierea numerelor unul sub altul;
- Dacă prin scăderea caracterelor de pe o coloana rezultatul obţinut este negativ (numărul de sus este mai mic decât numărul de jos), se împrumută de pe următoarea coloană din stânga o unitate în octal care înseamnă opt unităţi în zecimal;
- Se face suma algebrică dintre împrumut şi numerele de pe coloana respectivă iar în urma calculului se obţine cifra corespunzătoare rezultatului de pe acea coloană;
- Unitatea (1) împrumutată de pe o coloană se scade din cifra de sus a coloanei de unde a fost împrumutată.

Exemple de adunare a două numere octale

Exemplul 1.

	-1	-1	
	4	5	3_8
-	2	6	4_8
	(4-1-2=1)	(8+5-1-6=6)	(8+3-4=7)
	1	6	7_8

$457_8 - 264_8 = 167_8$

- Scad numerele de pe coloana din dreapta $\Rightarrow$ 3 – 4 < 0 $\Rightarrow$ împrumut o unitate octală de pe coloana din mijloc;
- Adun împrumutul la diferenţa numerelor de pe coloană $\Rightarrow$ 8+3-4=7 $\Rightarrow$ cifra 7;
- Scad din diferenţa numerelor de pe coloana din mijloc împrumutul $\Rightarrow$ 5 – 6 – 1 < 0 $\Rightarrow$ împrumut o unitate octală de pe coloana din stânga;
- Adun împrumutul la diferenţa numerelor de pe coloană 8+5-6-1=6 $\Rightarrow$ cifra 6;
- Din diferenţa numerelor de pe coloana din stânga scad unitatea împrumutată $\Rightarrow$ 4 – 2 -1 = 1 $\Rightarrow$ cifra 1.

Exemplul 2.

	-1	-1	
	6	1	2_8
-	4	5	7_8
	1	3	3_8

Exemplul 3.

	-1		
	5	3	2_8
-	2	5	1_8
	2	6	1_8

Exemplul 4.

	-1		
	3	6	2_8
-	1	3	8_8
	2	2	2_8

C. ADUNAREA NUMERELOR HEXAZECIMALE

Reguli:

- Adunarea se face ca în sistemul zecimal, prin scrierea numerelor unul sub altul
- Înainte de a efectua adunările, caracterele alfabetice (A, B,C,D,E,F) se înlocuiesc cu valorile lor în zecimal (10,11,12,13,14,15) – vezi tabelul 1.3 din secţiunea 1.1;
- Dacă prin adunarea caracterelor de pe o coloana se depăşeşte valoarea 15 numărul obţinut se scrie ca o sumă de 2 numere (un număr reprezintă baza sistemului adică 16 iar celălalt reprezintă valoarea cu care s-a depăşit baza) astfel:

  16 = 16 + 0 ; 17 = 16 + 1 ; 18 = 16 + 2 ; .... 31 = 16 + 15;
- Numărul care reprezintă *baza* (care are valoarea în hexazecimal 1) *se transportă* deasupra următoarei coloane din stânga;

- Se face suma algebrică dintre împrumut şi numerele de pe coloana respectivă iar în urma calculului se obţine cifra corespunzătoare rezultatului de pe acea coloană;
- Unitatea (1) împrumutată de pe o coloană se scade din cifra de sus a coloanei de unde a fost împrumutată.

<u>Exemple de scădere a două numere hexazecimale</u>

Exemplul 1.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \\
 & 5 & C\ 2 & B_{16} \\
- & 3 & A\ C & F_{16} \\
\hline
 & 2 & 1\ 5 & C_{16}
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & -1 & -1 & \\
 & 5 & 12 & 2 & 11_{16} \\
- & 3 & 10 & 12 & 15_{16} \\
\hline
 & (5-3=2) & (12-1-10=1) & (16+2-1-12=5) & (16+11-15=12=C) \\
 & 2 & 1 & 5 & C_{8}
\end{array}
$$

- Scad numerele de pe coloana din dreapta $\Rightarrow$ 11 – 15 < 0 $\Rightarrow$ împrumut o unitate hexazecimală de pe coloana din mijloc;
- Adun împrumutul la diferenţa numerelor de pe coloană $\Rightarrow$ 16 + 11 – 15 = 12 = C;
- Fac suma algebrică a numerelor de pe următoarea coloană din stânga

$\Rightarrow$ 2 – 1 – 12 < 0 $\Rightarrow$ împrumut o unitate hexazecimală de pe următoarea coloană;

- Adun împrumutul la diferenţa numerelor de pe coloană 16 + 2 – 1 – 12 = 5;
- Fac suma algebrică a numerelor de pe următoarea coloană din stânga

  $\Rightarrow$ 12 – 1 – 10 = 1
- Fac suma algebrică a numerelor de pe următoarea coloană din stânga

  $\Rightarrow$ 5 – 3 = 2

Exemplul 2.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & -1 & -1 & & \\
 & A & 3 & D & 4_{16} \\
- & 7 & 5 & 1 & B_{16} \\
\hline
 & 2 & E & B & 9_{16}
\end{array}
$$

Exemplul 3.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & -1 & -1 & & \\
 & C & E & D & 0_{16} \\
- & 1 & F & 0 & C_{16} \\
\hline
 & B & F & C & 4_{16}
\end{array}
$$

Exemplul 4.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & -1 & & \\
 & F & 2 & C & 3_{16} \\
- & 9 & D & 6 & E_{16} \\
\hline
 & 5 & 5 & 5 & 5_{16}
\end{array}
$$