2.4. SIMPLIFICAREA FUNCȚIILOR LOGICE

În proiectarea sistemelor digitale, implementarea circuitelor digitale se bazează pe algebra booleeană. Între gradul de complexitate al funcției logice care descrie un circuit şi gradul de complexitate al circuitului respectiv există o strânsă legătura. Dacă reuşim sa simplificăm expresia funcției logice vom reduce automat şi complexitatea circuitului.
Implementarea practică a circuitului se realizează pe baza formei minimizate a funcției logice care descrie circuitul numeric, ceea ce conduce la o configurație optimă de circuit.

2.4.1 TRANSFORMAREA TABELULUI DE ADEVĂR ÎN EXPRESII LOGICE

Procesul de proiectare a circuitelor digitale începe adeseori de la un tabel de adevăr. După cum am văzut în secțiunea **2.2**, tabelul de adevăr stabileşte corespondența dintre valorile de adevăr ale variabilelor de intrare şi valoarea de adevăr a funcției circuitului respectiv. În funcție de starea logică a variabilelor de intrare, funcția logică a circuitului are o anumită formă. Înainte de a fi simplificată, funcția logică trebuie determinată.

Pe baza tabelului de adevăr o funcție logică se determină relativ simplu, după următorul algoritm:

- Se identifică în tabelul de adevăr liniile în care valoarea variabilei de ieşire **f** este **1.**
- Se face produsul variabilelor de intrare de pe liniile respective (câte un produs pentru fiecare linie)
- Forma algebrică a funcției logice **f** este suma acestor produse

OBSERVAȚII:

- Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **0** în expresie produsului apare forma negată a variabilei respective.
- Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **1** în expresie produsului apare forma normală a variabilei respective.

Exemplu: Deducerea expresiei funcției logice care are tabelul de adevăr prezentat mai jos

Dec	Hex	A	B	C	Fn
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
2	2	0	1	0	0
3	3	0	1	1	1
4	4	1	0	0	0
5	5	1	0	1	1
6	6	1	1	0	1
7	7	1	1	1	1

$\overline{A} \cdot B \cdot C$

$A \cdot \overline{B} \cdot C$

$A \cdot B \cdot \overline{C}$

$\overline{A} \cdot B \cdot C$

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

http://eprofu.ro/electronica

În cele se urmează se va prezenta prin câteva exemple determinarea unei funcții logice pornind de la tabelul de adevăr.

EXEMPLUL 1.

Dec	Hex	A	B	C	Fn	
0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
2	2	0	1	0	1	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
3	3	0	1	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
4	4	1	0	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
5	5	1	0	1	0	
6	6	1	1	0	1	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
7	7	1	1	1	0	

$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

EXEMPLUL 2.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	0	
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$
8	8	1	0	0	0	0	
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$
11	B	1	0	1	1	1	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$
14	E	1	1	1	0	1	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
15	F	1	1	1	1	1	$A \cdot B \cdot C \cdot D$

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D +$$
$$+ A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

http://eprofu.ro/electronica

EXEMPLUL 3.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
8	8	1	0	0	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$
11	B	1	0	1	1	0	
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
14	E	1	1	1	0	0	
15	F	1	1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C\cdot D$

$$f=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot D$$

EXEMPLUL 4.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	0	
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
8	8	1	0	0	0	0	
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$
11	B	1	0	1	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
14	E	1	1	1	0	1	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
15	F	1	1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C\cdot D$

$$f=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+$$
$$+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot C\cdot D$$

http://eprofu.ro/electronica

2.4.2 MINIMIZAREA FUNCȚIILOR LOGICE

Minimizarea unei funcții logice se poate realiza prin:

- ***metoda analitică*** – care se bazează pe simplificarea expresiei unei funcții logice pe baza axiomelor şi teoremelor algebrei booleene
- ***metoda diagramelor Veitch – Karnaugh*** – care transpune axiomele şi teoreme algebrei booleene pe reprezentare funcției cu diagrame Karnaugh.

În cele se urmează se va explica prin câteva exemple simplificarea funcțiilor logice prin ambele metode.

EXEMPLUL 1. Minimizarea funcției $f = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

1.1 Metoda analitică

$$f = \overline{A}\bullet B\bullet C + A\bullet\overline{B}\bullet C + A\bullet B\bullet\overline{C} + A\bullet B\bullet C = B\bullet C\bullet(\underbrace{\overline{A} + A}_{1}) + A\bullet\overline{B}\bullet C + A\bullet B\bullet\overline{C} =$$

$$= B\bullet C + A\bullet\overline{B}\bullet C + A\bullet B\bullet\overline{C} = C\bullet(B + \underbrace{\overline{B}\bullet A}_{(B+A)}) + A\bullet B\bullet\overline{C} = C\bullet(B + A) + A\bullet B\bullet\overline{C} =$$

$$= C\bullet B + C\bullet A + A\bullet B\bullet\overline{C} = C\bullet B + A\bullet(C + \underbrace{\overline{C}\bullet B}_{(C+B)}) = C\bullet B + A\bullet(C + B) = B\bullet C + A\bullet C + A\bullet B$$

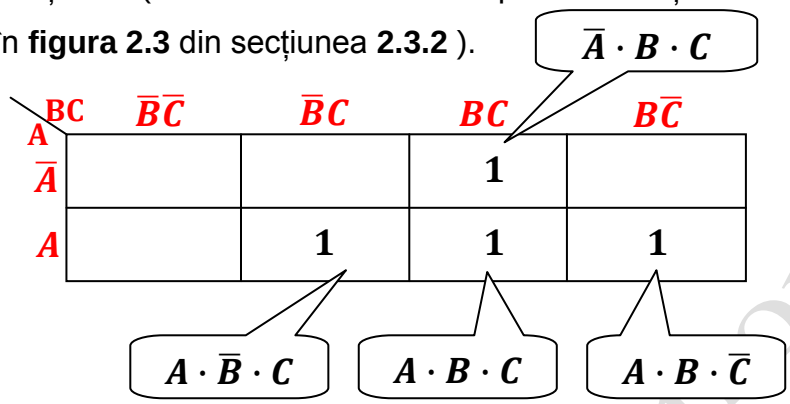
Prin metoda analitica se obține în urma minimizării funcția: $f = A\bullet B + A\bullet C + B\bullet C$

http://eprofu.ro/electronica

1.2 Metoda diagramei Karnaugh

Se parcurg următoarele etape:

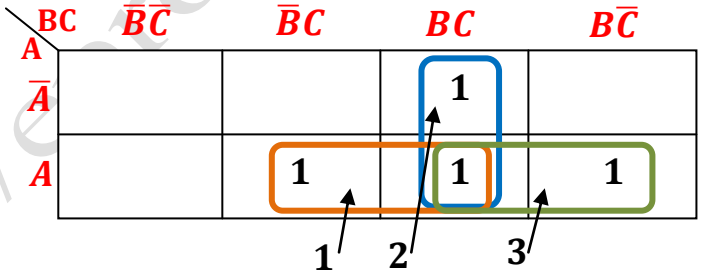
- Se scrie expresia funcției $f = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$
- Se desenează diagrama Karnaugh
- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzător poziției fiecărui produs al sumei funcției **f** (coordonatele celulelor pentru funcția cu 3 variabile sunt prezentate în **figura 2.3** din secțiunea **2.3.2**).



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conțin valoarea 1.

  OBSERVAȚII:

  - Fiecare grup trebuie să conțină **două sau patru celule adiacente.**
  - Celule adiacente au o latură comună pe verticală sau pe orizontală şi diferă printr-o singură variabilă.
  - Se consideră adiacente şi celulele da la capetele opuse ale unei linii sau coloane.
  - O celulă poate face parte din mai multe grupuri.
  - În diagrama de mai jos au fost identificate **3 grupuri** de câte două celule



- Se caută variabila sau variabilele comune pentru fiecare grup şi scriem pentru fiecare grup în parte, variabila (sau produsul de variabile dacă sunt mai multe) ca rezultat boolean. Rezultatul final este suma rezultatelor fiecărui grup
- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul **1** sunt comune variabilele **A** şi **C** - **rezultat logic A·C**
  - pentru grupul **2** sunt comune variabilele **B** şi **C – rezultat logic B·C**
  - pentru grupul **3** sunt comune variabilele **A** şi **B – rezultat logic A·B**
- Rezultatul final este : $f = A \bullet B + A \bullet C + B \bullet C$

http://eprofu.ro/electronica

EXEMPLUL 2. Minimizarea funcției :

$$f = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

2.1 Metoda analitică

$$f = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{C} \cdot (\bar{B} + B) +$$

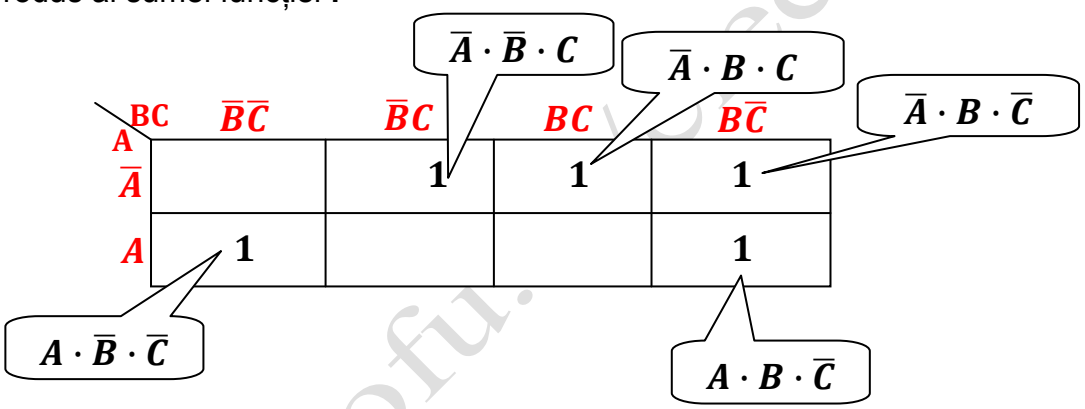
$$+ \bar{A} \cdot C \cdot (\bar{B} + B) + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot (C + B \cdot \bar{C}) =$$

$$= A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B \quad \Rightarrow \quad f = A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B$$

2.2 Metoda diagramei Karnaugh

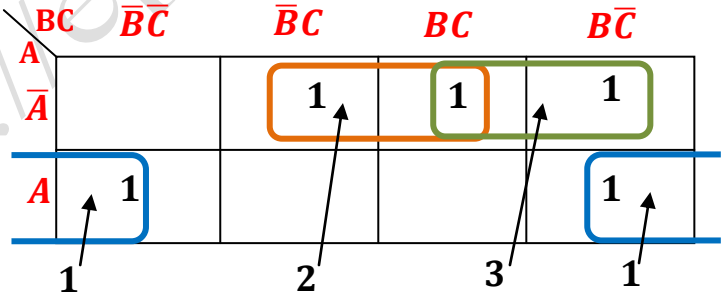
Se parcurg etapele prezentate la punctul 1.2

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziției fiecărui produs al sumei funcției **f**



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conțin valoarea 1

  În diagrama de mai jos au fost identificate **3 grupuri** de câte două celule



- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul **1** sunt comune variabilele A şi $\bar{C}$ **- rezultat logic $A \cdot \bar{C}$**
  - pentru grupul **2** sunt comune variabilele $\bar{A}$ şi C **– rezultat logic $\bar{A} \cdot C$**
  - pentru grupul **3** sunt comune variabilele $\bar{A}$ şi B **– rezultat logic $\bar{A} \cdot B$**
- Rezultatul final este : $f = A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B$

http://eprofu.ro/electronica

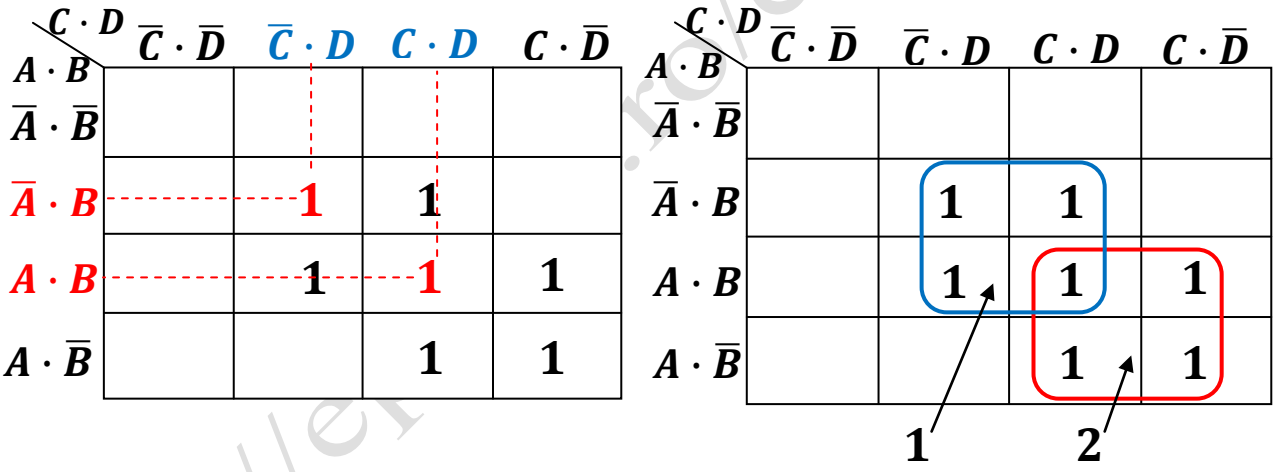
În exemplele următoare minimizarea unei funcții logice se va prezenta numai prin metoda diagramei Karnaugh .

EXEMPLUL 3. Minimizarea funcției :

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

Se observă că funcția are **patru** variabile de intrare ⇒ diagrama Karnaugh are 16 celule.

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziției fiecărui produs al sumei funcției **f**.
  Deoarece funcția are **7 termeni**, pe diagramă în **7 celule** va fi valoarea logică **1.**
  Fiecare termen al funcției se plasează la adresa corespunzătoare din celulă (vezi **figura 2.4** din secțiunea **2.3.2**). Primele două caractere ale unui termen indică linia iar ultimele două caractere ale termenului indică coloana la intersecția cărora se plasează caracterul **1** în tabel .**Exemple:**
  - termenul $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$ se plasează la intersecția **liniei** $\overline{A} \cdot B$ cu **coloana** $\overline{C} \cdot D$
  - termenul $A \cdot B \cdot C \cdot D$ se plasează la intersecția **liniei** $A \cdot B$ cu **coloana** $C \cdot D$



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conțin valoarea 1

În general, pe o diagramă Karnaugh se încearcă formarea grupurile cu dimensiunea pătratelor cât mai mare (cu cât dimensiunea pătratului este mai mare cu atât se elimină mai multe caractere din rezultatul final)

În diagrama de mai sus s-au format **2** grupuri cu **pătrate** care au **4 celule** (latura = 2).

- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul **1** sunt comune variabilele B şi D **- rezultat logic $B \cdot D$**
  - pentru grupul **2** sunt comune variabilele A şi C **– rezultat logic $A \cdot C$**
- Rezultatul final este : $f = A \cdot C + B \cdot D$

http://eprofu.ro/electronica

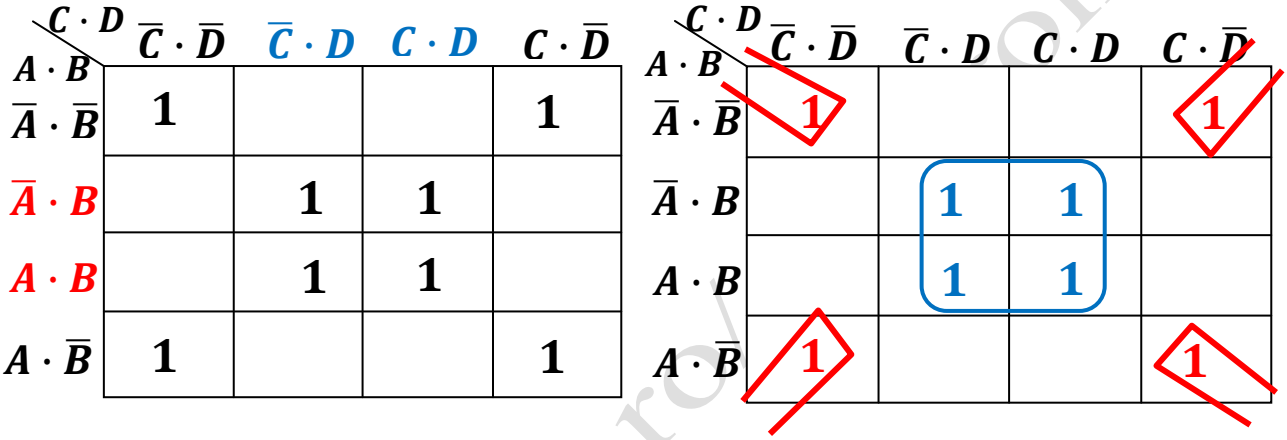
EXEMPLUL 4. Minimizarea funcției :

$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} +$$
$$+ \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziției fiecărui produs al sumei funcției **f**.

  Deoarece funcția are **8 termeni**, pe diagramă în **8 celule** va fi valoarea logică **1.**

  Fiecare termen al funcției se plasează la adresa corespunzătoare din celulă (vezi **figura 2.6** din secțiunea **2.3.2**).



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conțin valoarea 1

Celulele din cele patru colțuri ale diagramei dacă au valoarea **1** formează un **pătrat**.

În diagrama de mai sus s-au format **două** grupuri de **două pătrate** cu câte **4 celule**:

  - pentru pătratul format de celulele din mijlocul diagramei sunt comune variabilele B (pe cele 2 linii) şi D (pe cele 2 coloane) **- rezultat logic $B \cdot D$**
  - pentru pătratul format de celulele din colțurile diagramei sunt comune variabilele $\overline{B}$ (pe cele 2 linii) şi $\overline{D}$ (pe cele 2 coloane) **– rezultat logic $\overline{B} \cdot \overline{D}$**

- Rezultatul final este : $f = B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{D}$

http://eprofu.ro/electronica