2. FUNCȚII LOGICE

2.1 AXIOMELE ŞI TEOREMELE ALGEBREI LOGICE

Algebra logică are la bază ***principiul dualității*** potrivit căruia toate axiomele şi teoremele rămân valabile dacă se fac schimbările **"+"** cu **"•"** respectiv **"0"** cu **"1"**.
Semnul **"+"** reprezintă **ADUNARE** logică. Semnul **"•"** reprezintă **ÎNMULȚIRE** logică.
Conform principiului dualității fiecare axiomă şi teoremă are două forme.

AXIOMELE ALGEBREI LOGICE

1. ASOCIATIVITATEA

(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C **(A • B) • C = A • (B • C) = A • B • C**

2. COMUTATIVITATEA

A + B = B + A **A • B = B • A**

3. DISTRIBUTIVITATEA

A • (B + C) = A • B + A • C **A + B • C = (A + B) • (A + C)**

4. ELEMENT NEUTRU

A + 0 = 0 + A = A **A • 1 = 1 • A = A**

5. COMPLEMENTUL

A + $\overline{A}$ **= 1** **A •** $\overline{A}$ **= 0**

TEOREMELE ALGEBREI LOGICE

1. IDEMPOTENȚA

A + A + A + ...+ A = A **A • A • A • .....• A = A**

2. ELEMENTE NEUTRE

A + 1 = 1 **A • 0 = 0**

3. ABSORBȚIA

A + A • B = A **A • (A + B) = A**

4. ABSORBȚIA INVERSĂ

$\overline{A} + \overline{A} \cdot B = \overline{A}$ $\overline{A} \cdot (\overline{A} + B) = \overline{A}$

A + $\overline{A}$ **• B = A + B** **A • (**$\overline{A}$ **+ B) = A • B**

5. DUBLA NEGAȚIE (INVOLUȚIA)

$\overline{\overline{A}} = A$

6. TEOREMELE LUI DE MORGAN

$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$

Pentru înțelegerea şi demonstrarea axiomelor, teoremelor sau a altor relații în algebra logică se ține cont de următoarele reguli:

- **A** şi **B** pot fi înlocuite cu **0** sau **1**. Dacă **A = 0** atunci **B = 1** şi invers
- **0 • 0 = 0** **0 + 0 = 0** **0 • 1 = 0** $\overline{0} = 1$
- **1 • 1 = 1** **1 + 1 = 1** **1 • 0 = 0** $\overline{1} = 0$

http://eprofu.ro/electronica

2.2 PREZENTAREA FUNCȚIILOR LOGICE

Algebra booleană operează pe o mulțime **B = { x I x ∈ {0,1} }.**

În această mulțime se definesc 3 legi de compoziție:

- **Complementarea (** inversarea logică, negarea , "NU", „**NOT**")
- **Disjuncția** (suma logică, reuniunea , „SAU", „**OR**")
- **Conjuncția** (produsul logic, intersecția, „ŞI" , „**AND**")

O funcție ***f* : $B^n \rightarrow B$** se numeşte ***funcție booleană***.

O funcție booleană de **n** variabile **$y = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$** se caracterizează prin faptul că atât variabilele cât şi funcția nu pot lua decât două valori distincte **0** şi **1**.

Din cele prezentate mai sus rezultă că în algebra booleană sunt **trei** funcții elementare:

- **Funcția NU → (NOT) → NEGAȚIE**
- **Funcția SAU → (OR) → ADUNARE**
- **Funcția ŞI → (AND) → ÎNMULȚIRE**

Prin combinarea celor trei funcții logice elementare se mai obțin încă patru funcții logice:

- **Funcția SAU – NU → (NOR) → NEGAREA SUMEI LOGICE**
- **Funcția ŞI – NU → (NAND) → NEGAREA PRODUSULUI LOGIC**
- **Funcția SAU – EXCLUSIV → (XOR) → SUMA MODULO 2**
- **Funcția SAU – EXCLUSIV - NU → (NXOR) → NEGARE SUMĂ MODULO 2**

În **tabelul 2.1** sunt prezentate funcțiile logice elementare utilizate în algebra logică.

Tabelul 2.1 – FUNCȚII LOGICE ELEMENTARE

Nr. crt.	Denumirea funcției logice	Operația realizată	Expresia funcției logice
1	NU (NOT)	Inversare	$Y = \overline{A}$
2	SAU (OR)	Sumă logică	$Y = A + B$
3	ŞI (AND)	Produs logic	$Y = A \bullet B$
4	SAU - NU (NOR)	Negarea sumei logice	$Y = \overline{A + B}$
5	ŞI – NU (NAND)	Negarea produsului logic	$Y = \overline{A \bullet B}$
6	SAU - EXCLUSIV (XOR)	Sumă modulo 2	$Y = A \oplus B$
7	SAU - EXCLUSIV NEGAT (NXOR)	Negarea sumei modulo 2	$Y = \overline{A \oplus B}$

Funcțiile logice de bază prezentate mai sus se implementează (realizează) cu ajutorul unor circuite fizice numite ***porți logice***.

Aceste dispozitive sunt prezentate în capitolul **PORȚI LOGICE** .

http://eprofu.ro/electronica

2.3 REPREZENTAREA FUNCȚIILOR LOGICE

Pentru reprezentarea funcțiilor se folosesc în mod curent 2 metode:

- Reprezentarea prin tabela de adevăr
- Reprezentarea prin diagrame Veitch - Karnaugh

2.3.1. REPREZENTAREA FUNCȚIILOR LOGICE PRIN TABELA DE ADEVĂR

TABELA DE ADEVĂR - stabileşte corespondența dintre valorile de adevăr ale variabilelor de intrare şi valoarea de adevăr a funcției în fiecare punct al domeniului de definiție.

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI NU (NOT)

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI SAU (OR)

A	B	Y = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI ŞI (AND)

A	B	Y = A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI SAU - NU (NOR)

A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI ŞI - NU (NAND)

A	B	$Y = \overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI SAU-EXCLUSIV (XOR)

A	B	$Y = A \oplus B$ $Y = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCȚIEI SAU-EXCLUSIV- NEGAT (NXOR)

A	B	$Y = \overline{A \oplus B}$ $Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

http://eprofu.ro/electronica

2.3.2 REPREZENTAREA FUNCȚIILOR LOGICE PRIN DIAGRAME VEITCH - KARNAUGH

Diagramele Veitch - Karnaugh se utilizează pentru minimizarea unei funcții logice, în scopul obținerii unei expresii algebrice cât mai simple, care permite implementarea unui circuit digital cu un număr minim de porți logice.

Diagrama Karnaugh simplifică o funcție logică cu mai multe intrări (maxim 8).

O ***diagramă Karnaugh*** este o reprezentare grafică a tabelului de adevăr corespunzător unei funcții logice. Diagrama unei funcții logice cu ***n*** intrări, este un tablou 2^n celule, câte o celulă pentru fiecare combinație de intrare posibilă.

Liniile şi coloanele unei diagrame Karnaugh sunt etichetate astfel încât combinația de intrare a oricărei celule să poată fi aflată cu uşurință din denumirea liniei şi coloanei la intersecția cărora se află celula respectivă.

În fiecare celulă a diagramei se scrie o valoare logică **0** sau **1** care reprezintă valoarea de adevăr a funcției când variabilele de intrare au valorile coordonatelor celulei respective.

În celula unei diagrame mai poate fi scris (cu dimensiuni mici) numărul ***mintermenului*** corespunzător din tabelul de adevăr. Mintermenul reprezintă valoarea zecimală a numărului binar format din biții variabilelor de intrare (mai simplu, reprezintă numărul de ordine al rândului din tabelul de adevăr cu precizarea că numărătoarea începe de la **0**.

a. Diagrama Karnaugh pentru o funcție cu două variabile

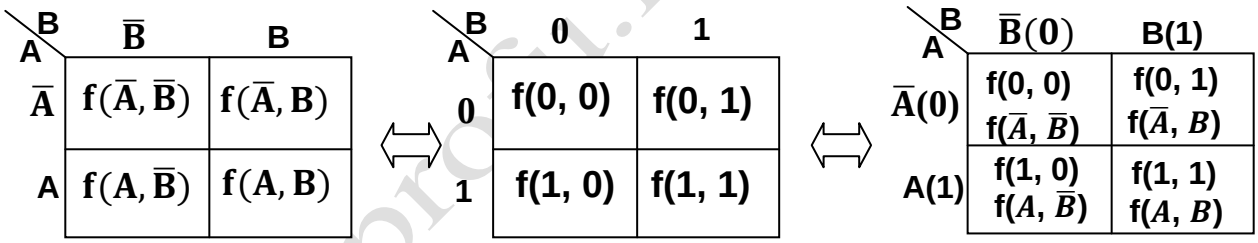


Figura 2.1 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 2 variabile

Transformarea tabelului de adevăr a unei funcții cu două variabile în diagramă Karnaugh este prezentată în **figura 2.2**

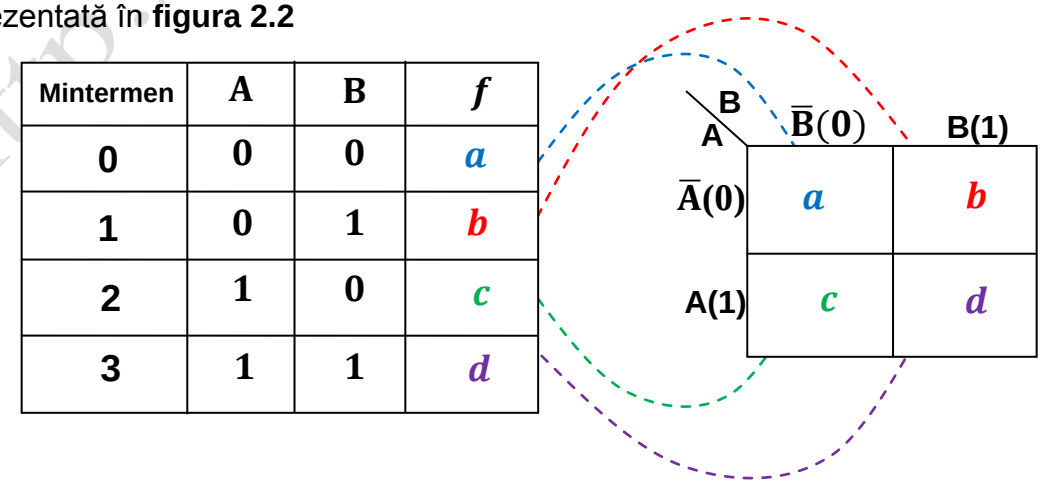
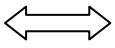


Figura 2.2 Corespondența dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

http://eprofu.ro/electronica

b. Diagrama Karnaugh pentru o funcție cu trei variabile

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	$f(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$	$f(\bar{A},\bar{B},C)$	$f(\bar{A},B,C)$	$f(\bar{A},B,\bar{C})$
A	$f(A,\bar{B},\bar{C})$	$f(A,\bar{B},C)$	$f(A,B,C)$	$f(A,B,\bar{C})$



A \ BC	00	01	11	10
0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

Figura 2.3 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 3 variabile

Transformarea tabelului de adevăr a unei funcții cu trei variabile în diagramă Karnaugh este prezentată în **figura 2.4**

Mintermen	A	B	C	f
0	0	0	0	a
1	0	0	1	b
2	0	1	0	c
3	0	1	1	d
4	1	0	0	e
5	1	0	1	f
6	1	1	0	g
7	1	1	1	h

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}(00)$	$\bar{B}C(01)$	$BC(11)$	$B\bar{C}(10)$
$\bar{A}(0)$	0 a	1 b	3 d	2 c
$A(1)$	4 e	5 f	7 h	6 g

Figura 2.4 Corespondența dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

http://eprofu.ro/electronica

http://eprofu.ro/electronica

c. Diagrama Karnaugh pentru o funcție cu patru variabile

A · B \ C · D	$\bar{C}\cdot\bar{D}$	$\bar{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\bar{D}$
$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$f(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$	$f(\bar{A},\bar{B},\bar{C},D)$	$f(\bar{A},\bar{B},C,D)$	$f(\bar{A},\bar{B},C,\bar{D})$
$\bar{A}\cdot B$	$f(\bar{A},B,\bar{C},\bar{D})$	$f(\bar{A},B,\bar{C},D)$	$f(\bar{A},B,C,D)$	$f(\bar{A},B,C,\bar{D})$
$A\cdot B$	$f(A,B,\bar{C},\bar{D})$	$f(A,B,\bar{C},D)$	$f(A,B,C,D)$	$f(A,B,C,\bar{D})$
$A\cdot\bar{B}$	$f(A,\bar{B},\bar{C},\bar{D})$	$f(A,\bar{B},\bar{C},D)$	$f(A,\bar{B},C,D)$	$f(A,\bar{B},C,\bar{D})$

⇕

A · B \ C · D	00	01	11	10
00	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
01	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
11	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
10	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

Figura 2.5 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 4 variabile

Minterme n	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	a
1	0	0	0	1	b
2	0	0	1	0	c
3	0	0	1	1	d
4	0	1	0	0	e
5	0	1	0	1	f
6	0	1	1	0	g
7	0	1	1	1	h
8	1	0	0	0	i
9	1	0	0	1	j
10	1	0	1	0	k
11	1	0	1	1	l
12	1	1	0	0	m
13	1	1	0	1	n
14	1	1	1	0	o
15	1	1	1	1	p

AB \ CD	$\bar{C}\,\bar{D}$(00)	$\bar{C}D$(01)	CD(11)	$C\bar{D}$(10)
$\bar{A}\,\bar{B}$(00)	0 a	b	3 d	2 c
$\bar{A}B$(01)	4 e	5 f 7	h	6 g
AB(11)	12 m	13 n	15 p	14 o
$A\bar{B}$(10)	8 i	9 j	11 l	10 k

Figura 2.6 Corespondența dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

http://eprofu.ro/electronica