

B. TRIUNGHIUL ISOSCEL, ECHILATERAL, OARECARE

1) Un triunghi isoscel ABC cu AB=AC; are BC=12cm si perimetru=32cm. Se cere:

- a) Aria ΔABC ; b) distanta de la B la AC ; c) $\sin(\angle BAC)$;
- d) distanta de la mijlocul bazei la AC ; e) Raza cercului circumscris ΔABC .

Rezolvare:

Perimetru $\Delta ABC = 2 \cdot AB + BC = 2 \cdot AB + 12 = 32 \Rightarrow AB = AC = 10 \text{ cm} ; BC = 12 \text{ cm}$

In ΔADC $\stackrel{(TP)}{\Rightarrow} AD^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow AD^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AD = 8 \text{ cm}$

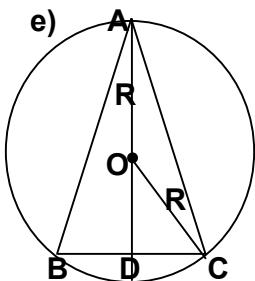
a) Aria $\Delta ABC = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} \Rightarrow \text{Aria } \Delta ABC = 48 \text{ cm}^2$

b) Distanța de la B la AC este \perp din B pe AC ; $d(B;AC) = BE$

Din $BE \cdot AC = AD \cdot BC \Rightarrow BE = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{8 \cdot 12}{10} = \frac{48}{5} \Rightarrow BE = \frac{48}{5} \text{ cm}$

c) In ΔABE ($m\angle E = 90^\circ$) $\Rightarrow \sin(\angle BAE) = \frac{BE}{AB} = \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{24}{25}$

d) D este mijlocul bazei ,iar DF \perp AC \Rightarrow $d(D;AC)=DF$;In ΔADC \Rightarrow $DF = \frac{AD \cdot DC}{AC} \Rightarrow DF = \frac{24}{5} \text{ cm.}$



In ΔODC $OD = AD - AO \Rightarrow OD = (8 - R) ; OC = R ; DC = 6 \text{ cm}$

In ΔODC $\Rightarrow OC^2 = OD^2 + DC^2 \Rightarrow R^2 = (8-R)^2 + 6^2 \Rightarrow R^2 = 64 - 16R + R^2 + 36 \Rightarrow 100 \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow R = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ cm}$

2) ΔABC isoscel cu , AB=AC , $m(\angle BAC)=120^\circ$, aria $\Delta ABC=4\sqrt{3}\text{cm}^2$. Se cere:

- a) Perimetru ΔABC ; b) inaltimea corespunzatoare laturii AB ; c) Raza cercului inscris si circumscris

Rezolvare:

a) In ΔADC notam $AC=2x \Rightarrow AD=x$ ($m\angle C=30^\circ$)

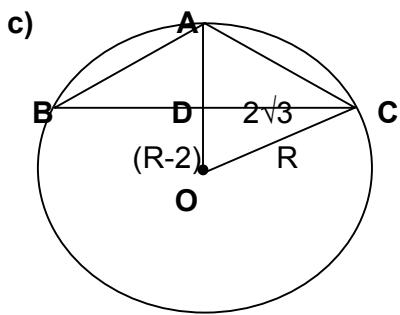
In $\Delta ADC \Rightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2 \Rightarrow DC^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow DC = x\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2 \cdot x\sqrt{3}$

Aria $\Delta ABC = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{2x\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{2} = x^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$

$\Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AC = 2 \cdot 2 = 4 ; BC = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Deci: $AB=AC = 4 \text{ cm} ; BC = 4\sqrt{3} \text{ cm} ; AD = 2 \text{ cm} \Rightarrow \text{Perimetru } \Delta ABC = (8+4\sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$

b) $CE \perp AB \Rightarrow CE \cdot AB = AD \cdot BC \Rightarrow CE = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

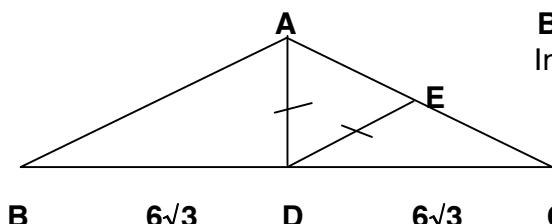


$$\text{In } \triangle ODC \quad OD = AO - AD \Rightarrow OD = R - 2; \quad OC = R; \quad DC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} &\text{(TP)} \\ &\text{In } \triangle ODC \Rightarrow OD^2 + DC^2 = OC^2 \Rightarrow (R-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = R^2 \\ &\Rightarrow R^2 - 4R + 4 + 12 = R^2 \Rightarrow 4R = 16 \Rightarrow R = 4 \text{ cm} \\ &\quad A \quad 2\sqrt{3} \quad 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) \\ &r = \frac{p}{4} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) \text{ cm.} \end{aligned}$$

7) Calculați aria și perimetrul unui triunghi isoscel care are lungimea bazei $12\sqrt{3}$ cm iar înălțimea corespunzătoare bazei este egală cu segmentul care unește mijlocul bazei cu mijlocul unei laturi congruente.

Rezolvare:



$$\begin{aligned} &BC = 12\sqrt{3} \text{ cm}; \quad AD = DE \\ &\text{In } \triangle ADC \quad (\angle D = 90^\circ), \quad DE - \text{mediana} \Rightarrow DE = \frac{AC}{2} \\ &AD = DE \Rightarrow AD = \frac{AC}{2} \Rightarrow m(\angle ACD) = 30^\circ \Rightarrow \\ &\qquad \qquad \qquad \Rightarrow m(\angle DAC) = 60^\circ \\ &DC = \sqrt{3} \quad 6\sqrt{3} \quad 2\cdot 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{In } \triangle ADC \quad (\angle D = 90^\circ) \Rightarrow \sin(\angle A) = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$$

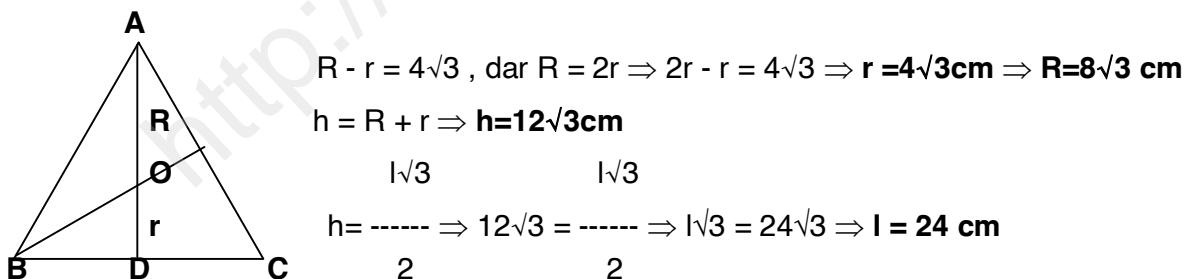
$$\text{In } \triangle ADC \quad (\angle D = 90^\circ \text{ si } \angle C = 30^\circ) \Rightarrow AD = \frac{AC}{2} \Rightarrow AD = 6 \text{ cm}$$

$$BC \cdot AD = 12\sqrt{3} \cdot 6$$

$$\text{Aria } \triangle ABC = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 6}{2} \Rightarrow \text{Aria } \triangle ABC = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2; \quad \text{Perim. } \triangle ABC = (24 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}$$

8) Intr-un Δ echilateral diferența dintre raza cercului circumscris și raza cercului inscris este $4\sqrt{3}$ cm. Se cere: înălțimea ; latura ; aria și perimetrul triunghiului echilateral.

Rezolvare:



$$R - r = 4\sqrt{3}, \quad \text{dar } R = 2r \Rightarrow 2r - r = 4\sqrt{3} \Rightarrow r = 4\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow R = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$h = R + r \Rightarrow h = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$l\sqrt{3} \quad l\sqrt{3}$$

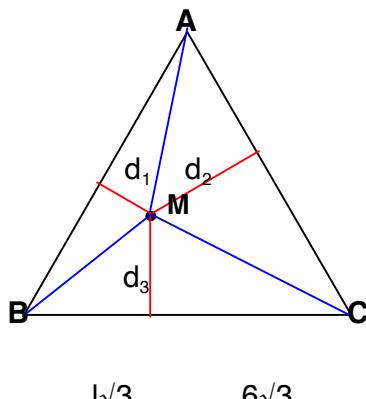
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 12\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \Rightarrow l = 24 \text{ cm}$$

$$l \cdot h = 24 \cdot 12\sqrt{3}$$

$$\text{Aria } \triangle ABC = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot 12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Aria } \triangle ABC = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2; \quad \text{Perim. } = 3 \cdot l = 3 \cdot 24 = 72 \text{ cm}$$

9) Intr-un Δ echilateral cu latura 6cm se considera un punct M oarecare. Se cere: **a)** Aratati ca suma distantele de la punctul M la laturile triunghiului este constanta ; **b)** Raza cercului inscris si raza cercului circumscris ΔABC

Rezolvare:



Distantele de la M la laturile Δ sunt \perp din M pe laturile Δ

$$d_1 \perp AB; d_2 \perp AC; d_3 \perp BC$$

Unim M cu virfurile $\Delta \Rightarrow \Delta MAB; \Delta MAC; \Delta MBC$

Scriem aria ΔABC ca suma ariilor celor 3 triunghiuri care se formeaza

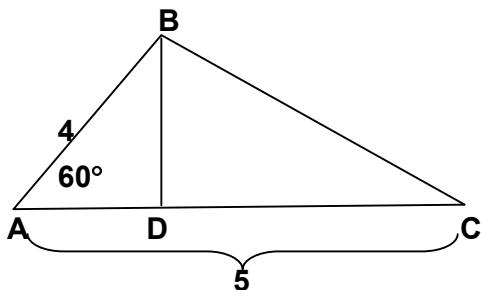
$$\text{Aria} \Delta ABC = \text{Aria} \Delta MAB + \text{Aria} \Delta MAC + \text{Aria} \Delta MBC$$

$$\frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \cdot d_1}{2} + \frac{l \cdot d_2}{2} + \frac{l \cdot d_3}{2} \Rightarrow l \cdot h = l \cdot (d_1 + d_2 + d_3) \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = h$$

$$\mathbf{b)} h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}; r = \frac{h}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = \sqrt{3} \text{ cm}; R = 2 \cdot r \Rightarrow R = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

10) Calculati aria , perimetrul si $\sin(\angle ACB)$ unui triunghi ABC cu $m(\angle A)=60^\circ$; $AB=4\text{cm}$; $AC=5\text{cm}$.

Rezolvare:



Construim $BD \perp AC \Rightarrow \Delta BDA$ si ΔBDC

In ΔBDA ($\angle D=90^\circ$ si $\angle B=30^\circ$) $\Rightarrow AD=AB/2 \Rightarrow AD=2 \text{ cm}$

$$\mathbf{AD = 2 \text{ cm} \Rightarrow DC = AC - AD = 5 - 2 = 3 \Rightarrow DC = 3 \text{ cm}}$$

In $\Delta BDA \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$

In $\Delta BDC \Rightarrow BC^2 = BD^2 + DC^2 = 12 + 9 \Rightarrow BC = \sqrt{21} \text{ cm}$

$$AC \cdot BD = 5 \cdot 2\sqrt{3}$$

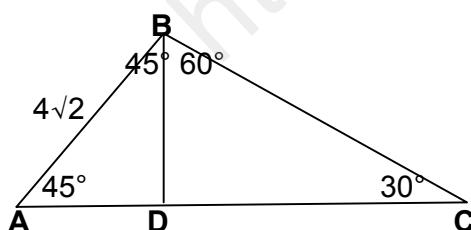
$$\text{Aria } \Delta ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

$$\mathbf{\text{Perimetru } \Delta ABC = AB + AC + BC = 4 + 5 + \sqrt{21} = (9 + \sqrt{21}) \text{ cm.}}$$

$$\text{In } \Delta BDC (\text{m}\angle D=90^\circ) \Rightarrow \sin(\angle BCD) = \frac{BD}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

11) Calculati aria si perimetrul unui triunghi ABC cu $m(\angle A)=45^\circ$; $m(\angle B)=105^\circ$; $AB=4\sqrt{2}\text{cm}$

Rezolvare:



Construim $BD \perp AC \Rightarrow \Delta BDA$ si ΔBDC

ΔBDC dreptunghic isoscel \Rightarrow notam $AD=BD=x$

$$\text{In } \Delta BDC \Rightarrow x^2 + x^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

$$\mathbf{AD = BD = 4 \text{ cm} \qquad BC}$$

$$\text{In } \Delta BDC (\text{m}\angle C=30^\circ) \Rightarrow BD = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2 \cdot BD \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}$$

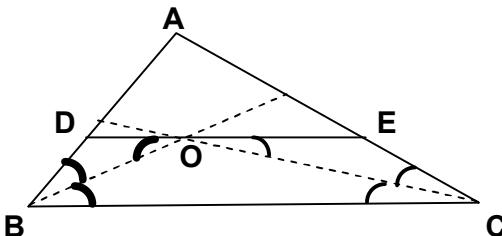
$$\text{In } \Delta BDC \Rightarrow DC^2 = BC^2 - BD^2 \Rightarrow DC^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow DC = 4\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow AC = (4+4\sqrt{3}) \text{ cm.}$$

$$AC \cdot BD = 4(1+\sqrt{3}) \cdot 4^2$$

$$\mathbf{\text{Aria } \Delta ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8(1+\sqrt{3})}{2} = 4(1+\sqrt{3}) \text{ cm}^2; \text{ Perimetru } \Delta ABC = (4\sqrt{2}+12+4\sqrt{3}) \text{ cm.}}$$

12) Se consideră $\triangle ABC$, $AB=6\text{cm}$ și $AC=7\text{cm}$. Paralela la BC dusa prin centrul cercului inscris în $\triangle ABC$ intersectează latura AB în D și latura AC în E . Calculați perimetrul $\triangle ADE$

Rezolvare:



Dacă O este centrul cercului inscris $\Rightarrow CO$ și BO sunt bisectoare $\Rightarrow m(\angle ACO)=m(\angle BCO)$
 $m(\angle ABO)=m(\angle CBO)$

$DE \parallel BC$ și CO secanta $\Rightarrow m(\angle EOC)=m(\angle BCO)$ (alterne interne)

dar $m(\angle ACO)=m(\angle BCO) \Rightarrow m(\angle EOC)=m(\angle ACO) \Rightarrow \triangle EOC$ isoscel $\Rightarrow EO=EC$

$DE \parallel BC$ și BO secanta $\Rightarrow m(\angle DOB)=m(\angle CBO)$ (alterne interne)

dar $m(\angle ABO)=m(\angle CBO) \Rightarrow m(\angle DOB)=m(\angle ABO) \Rightarrow \triangle DOB$ isoscel $\Rightarrow DO=DB$

Perimetru $\triangle ADE=AD+AE+DE=AD+AE+DO+OE=AD+DB+AE+EC=AB+AC=6+7=13\text{ cm}$

13) Un \triangle are laturile de lungimi $10\sqrt{5}\text{cm}$, $20\sqrt{2}\text{cm}$, 30cm . Calculați aria triunghiului ABC și $\operatorname{tg}(\angle ABC)$

Rezolvare:

Verific dacă \triangle este dreptunghic: $(10\sqrt{5})^2 = 100 \cdot 5 = 500$

$$(20\sqrt{2})^2 = 400 \cdot 2 = 800$$

$$(30)^2 = 900$$

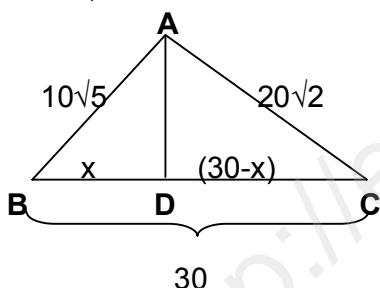
Constat că $500 + 800 \neq 900 \Rightarrow \triangle ABC$ **NU** este dreptunghic $\Rightarrow \triangle ABC$ este triunghi oarecare.

O metodă de a calcula aria este să utilizezi formula: Aria $\triangle ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde

$$a+b+c$$

a, b, c sunt laturile triunghiului iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperimetru)

Deoarece laturile nu sunt numere întregi, calculul algebraic este greoi, astfel că voi rezolva problema geometrică, astfel:



In $\triangle ABC$ oarecare, construiesc $AD \perp BC \Rightarrow$ Aria $\triangle ABC = \frac{BC \cdot AD}{2}$

Că să calculezi aria, trebuie să calculezi segmentul AD

Notează segmentul BD cu $x \Rightarrow$ segmentul DC este $(30-x)$

Aplic teorema lui Pitagora în $\triangle ADB$ și în $\triangle ADC \Rightarrow$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \Rightarrow AD^2 = 500 - x^2 \quad (1)$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow AD^2 = 800 - (30-x)^2 \quad (2)$$

Egalează relațiile (1) și (2) $\Rightarrow 800 - (30-x)^2 = 500 - x^2 \Rightarrow 800 - 900 + 60x - x^2 = 500 - x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 60x - x^2 + x^2 = 500 - 800 + 900 \Rightarrow 60x = 600 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow BD = 10\text{cm} \text{ și } DC = 20\text{cm}$$

In relația (1) $AD^2 = 500 - x^2 \Rightarrow AD^2 = 500 - 100 \Rightarrow AD^2 = 400 \Rightarrow AD = \sqrt{400} \Rightarrow AD = 20\text{ cm}$

$$\text{Aria } \triangle ABC = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{30 \cdot 20^{10}}{2} = 300\text{ cm}^2$$

$$\text{In } \triangle ADB \text{ cu } m(\angle ADB)=90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle ABD) = \frac{AD}{BD} = \frac{20}{10} = 2$$