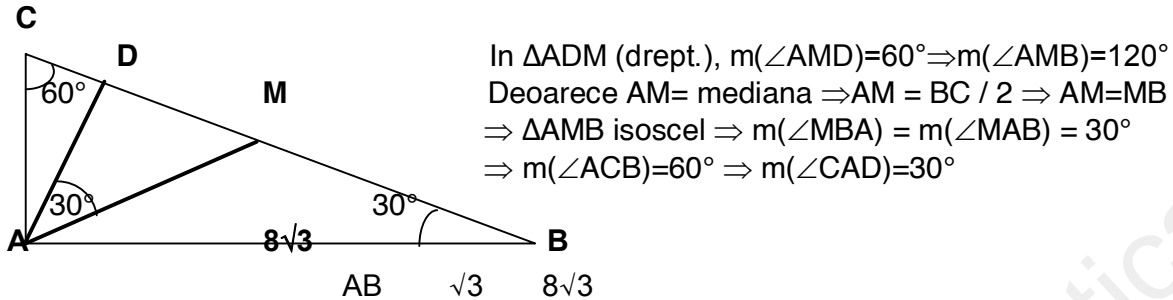


B. TRIUNGIUL DREPTUNGHIC

- 1) În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul $A=90^\circ$; $AD \perp BC$ ($D \in BC$) ; unghiul dintre mediana și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este 30° ; latura mijlocie a triunghiului este $8\sqrt{3}$ cm se cere:
a) aria și perimetrul ΔABC ; **b)** înălțimea din unghiul drept ; **c)** proiecțiile catetelor pe ipotenuza
d) raportul dintre ariile ΔADB și ΔADC . **e)** cit la suta din aria ΔABC reprezintă aria ΔADC
f) Lungimea cercului înscris și aria discului circumscris ΔABC

Rezolvare:



$$\text{In } \Delta ABC \Rightarrow \sin(\angle ACB) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{8\sqrt{3}}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 16 \text{ cm}$$

$$\text{In } \Delta ABC \quad m(\angle A)=90^\circ$$

$$m(\angle B)=30^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{2} \Rightarrow AC = 8 \text{ cm. Deci } AB=8\sqrt{3} \text{ cm ; } AC= 8 \text{ cm ; } BC = 16 \text{ cm.}$$

$$\text{a) Aria } \Delta ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 8}{2} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2 . \text{ Perimetrul } \Delta ABC = AB + AC + BC = 8\sqrt{3} + 24 = 8(\sqrt{3} + 3) \text{ cm}$$

$$\text{b) In } \Delta ABC \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 8}{16} \Rightarrow AD = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

- c) Proiecția catetei **AB** pe ipotenuza **BC** este **BD**
 Proiecția catetei **AC** pe ipotenuza **BC** este **CD**

$$\text{In } \Delta ADC \quad (m\angle D=90^\circ)$$

$$(m\angle A=30^\circ) \Rightarrow CD = \frac{AC}{2} \Rightarrow CD = 4 \text{ cm ; } BD = BC - CD \Rightarrow BD = 12 \text{ cm}$$

$$\text{d) Aria } \Delta ADB = \frac{AD \cdot DB}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 ; \text{ Aria } \Delta ADC = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\frac{\text{Aria } \Delta ADB}{\text{Aria } \Delta ABC} = \frac{24\sqrt{3}}{32\sqrt{3}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$\frac{\text{Aria } \Delta ADC}{\text{Aria } \Delta ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{32\sqrt{3}} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$\text{e) Se scrie ecuația: } \frac{x}{100} \cdot \text{Aria } \Delta ABC = \text{Aria } \Delta ADC \Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 32\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 8\sqrt{3}}{32\sqrt{3}} = 25\%$$

f) Se calculeaza mai intai raza cercului inscris(r) si raza cercului circumscris (R)

$$r = \frac{A}{p} = \frac{32\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+3)} = \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3}-3)}{3-9} = \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3}-3)}{-6} = \frac{8\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{3} \text{ cm}$$

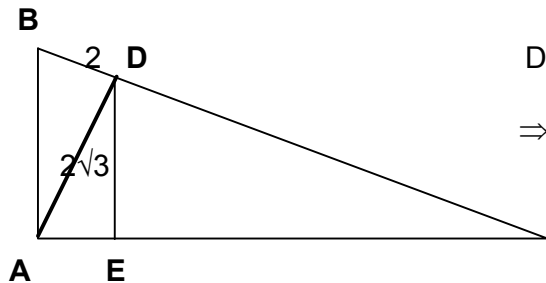
ipotenuza
 $R = \frac{\text{ipotenuza}}{2} \Rightarrow R = 8 \text{ cm}$

Lungimea cercului inscris $L = 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{8\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\pi}{3} \text{ cm}$; Aria discului circumscris $A = \pi \cdot R^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

2) În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul $A=90^\circ$; $AD \perp BC$ ($D \in BC$) ; E ste proiectia punctului D pe AC ; $AD=2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $BD=2 \text{ cm}$ se cere: **a)** Perimetrul $\triangle CED$; **b)** raportul ariilor triunghiurilor DEC și BAC.

c) Unghiurile $\triangle ABC$

Rezolvare:



Deoarece E este proiectia lui D pe AC $\Rightarrow DE \perp AC$
 $\frac{DE}{DC} = \frac{DC}{EC}$

$\Rightarrow DE \parallel AB \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC}$

Daca $\triangle DEC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{\text{Aria } \triangle DEC}{\text{Aria } \triangle BAC} = \left(\frac{DC}{BC}\right)^2$

Aplicam in $\triangle ABC$ teorema inaltimii $\Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = 2 \cdot DC \Rightarrow 2 \cdot DC = 12 \Rightarrow DC = 6 \text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = BD + DC = 2 + 6 = 8 \text{ cm}$

Aplicam torema catetei in $\triangle ABC \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow AB^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

$\Rightarrow AC^2 = CD \cdot CB \Rightarrow AC^2 = 6 \cdot 8 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

a) $\frac{DE}{4} = \frac{6}{8} = \frac{EC}{4\sqrt{3}} \Rightarrow DE = \frac{6 \cdot 4}{8} \Rightarrow DE = 3 \text{ cm}$; $EC = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{8} \Rightarrow EC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

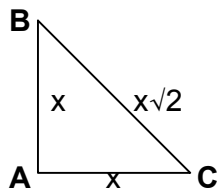
Perimetrul $\triangle CED = DC + DE + EC = 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3} = 3(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$

b) $\frac{\text{Aria } \triangle DEC}{\text{Aria } \triangle BAC} = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{9}{16}$

c) In $\triangle ABC$ $m(\angle A) = 90^\circ$ si $AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\angle ACB) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle ABC) = 60^\circ$.

3) Un triunghi dreptunghic isoscel ABC are perimetrul $6(2+\sqrt{2})\text{cm}$. Calculati aria si inaltimea corespunzatoare ipotenuzei in ΔABC .

Rezolvare:



La rezolvarea triunghiului dreptunghic isoscel notam catetele cu x si aflam cu teorema lui Pitagora ipotenuza. $BC^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$

$$\text{Perimetrul } \Delta ABC = x + x + x\sqrt{2} \Rightarrow x(2+\sqrt{2}) = 6(2+\sqrt{2}) \Rightarrow x=6\text{cm}$$

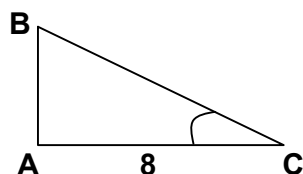
$$AB = AC = 6\text{cm iar } BC = 6\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$\text{Aria } \Delta ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \Rightarrow \text{Aria } \Delta ABC = 18\text{ cm}^2$$

$$\text{Deoarece in } \Delta \text{ dr is inaltimea din } \angle \text{ de } 90^\circ \text{ este si mediana} \Rightarrow \text{inaltimea} = \frac{BC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

4) In ΔABC dreptunghic cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $\sin(\angle ACB) = \frac{3}{5}$; $AC > AB$; $AC = 8\text{cm}$. Calculati A_Δ si P_Δ

Rezolvare:



$$\text{In } \Delta ABC \sin(\angle ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB=3k \text{ si } BC = 5k$$

$$\text{Aplicam teorema lui Pitagora in } \Delta ABC \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9k^2 + 64 = 25k^2 \Rightarrow$$

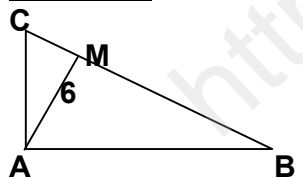
$$\Rightarrow 16k^2 = 64 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow AB = 6\text{cm}; BC = 10\text{cm}.$$

$$\text{Aria } \Delta ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \Rightarrow \text{Aria } \Delta ABC = 24\text{ cm}^2; \text{ Perimetrul } \Delta ABC = 6 + 8 + 10 = 24\text{cm}$$

5) In ΔABC dr. cu $m(\angle A) = 90^\circ$, M este proiectia punctului A pe ipotenuza BC, $AM = 6\text{ cm}$, iar proiectiile catetelor pe ipotenuza sunt direct proportionale cu numerele 2 si 6.

Se cere: a) Aria si perimetrul ΔABC ; b) Unghiurile ΔABC

Rezolvare:



a) Deoarece $AM \perp BC \Rightarrow CM$ este proiectia catetei AC pe ipotenuza BC
 BM este proiectia catetei AB pe ipotenuza BC

Deoarece aceste proiectii sunt direct proportionale cu 2 si 6 $\Rightarrow CM = 2 \cdot k$
 $BM = 6 \cdot k$

$$\text{In } \Delta ABC \text{ aplic teorema inaltimii} \Rightarrow AM^2 = CM \cdot BM \Rightarrow 36 = 2k \cdot 6k \Rightarrow 12k^2 = 36 \Rightarrow k^2 = 3 \Rightarrow k = \sqrt{3} \Rightarrow CM = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\text{ cm}; BM = 6 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\text{In } \Delta ABC \text{ (conform teoremei catetei)} \Rightarrow AC^2 = CM \cdot CB \Rightarrow AC^2 = 2\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 16 \cdot 3 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$AB^2 = BM \cdot BC \Rightarrow AB^2 = 6\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 48 \cdot 3 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} = 12\text{ cm}$$

$$\text{Aria } \Delta ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2; \text{ Perimetrul } \Delta ABC = BC + AB + AC = 8\sqrt{3} + 12 + 4\sqrt{3} = 12 + 12\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{In } \Delta ABC \text{ cu } m(\angle A) = 90^\circ \text{ si } AC = \frac{BC}{2} \Rightarrow (\text{conform recip. teor. } \angle \text{ de } 30^\circ) m(\angle B) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 60^\circ$$