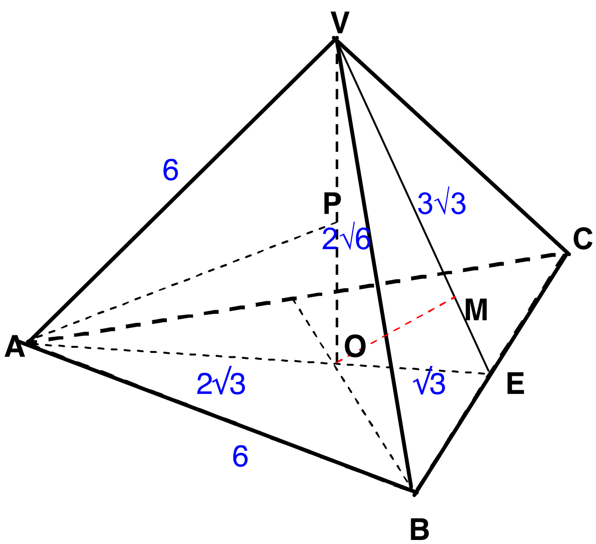
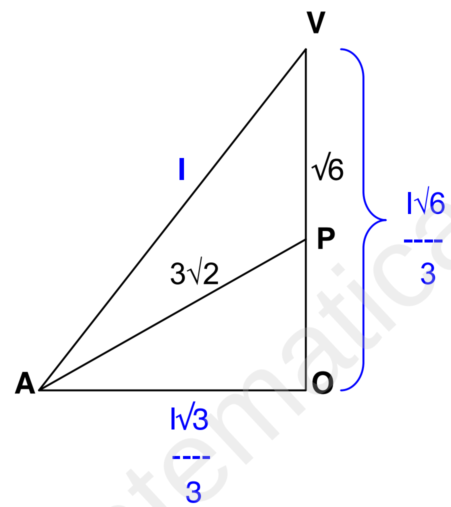
H. TETRAEDRUL REGULAT - PROBLEME REZOLVATE

1. Fie VABC un tetraedru regulat și P un punct în interiorul lui astfel încât distanțele de la P la punctele A, B, C, să fie egale cu 3√2 cm, iar VP=√6cm. Se cere:

a) Volumul tetraedrului ;
b) sinusul unghiului format de muchia laterală cu planul bazei ;
c) distanța de la centrul bazei la o față laterală;
d) sinusul unghiului dintre doua fete ale tetraedrului.





a) Daca PA=PB=PC⇒P se afla pe directia centrului cercului circumscris ΔABC ⇒

P se afla pe inaltimea VO a tetraedrului.

Notam cu l muchia tetraedrului si scriem laturile ΔVOA in functie de l

$\mathbf{AO} = \frac{2}{3} \cdot AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{l\sqrt{3}}{3}}$; $\mathbf{VA = l}$; $VO^2=VA^2-AO^2 = \frac{l^2}{1} - \frac{3l^2}{9} = \frac{6l^2}{9} \Rightarrow \mathbf{VO = \frac{l\sqrt{6}}{3}}$

In ΔAOP, ∠O=90° ⇒ $AO^2+OP^2=AP^2 \Rightarrow \frac{3l^2}{9} + \left(\frac{l\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6}\right)^2 = 18 \Rightarrow \frac{3l^2}{9} + \frac{6l^2}{9} - 4l + 6 = 18 \Rightarrow$

$l^2-4l-12=0 \Rightarrow l^2+2l-6l-12=0 \Rightarrow l(l+2) - 6(l+2)=0 \Rightarrow (l+2)(l-6)=0 \Rightarrow l_1=-2;\ l_2=6 \Rightarrow$ **l=6cm** ⇒

VA = 6cm ; AO = $\frac{6\sqrt{3}}{3}$ **= 2√3 cm ; VO =** $\frac{6\sqrt{6}}{3}$ **= 2√6 cm ; OE =** $\frac{OA}{2}$ **= √3 cm**

Aria bazei = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4}$ = **9√3 cm².**

In ΔVOE, m∠O=90° ⇒ $VE^2 = VO^2 + OE^2 \Rightarrow VE^2 = 24 + 3 = 27 \Rightarrow VE = \sqrt{27} \Rightarrow$ **VE=3√3cm**

Volumul = $\frac{\textbf{Aria bazei} \cdot \textbf{inaltimea}}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{3}$ = **18√2cm³.**

b) $VO \perp (ABC) \Rightarrow$ proiectia lui AV pe (ABC) este AO$\Rightarrow \angle(VA; (ABC))=\angle(VA; AO)=\angle(VAO)$

In ΔVOA , $\angle O=90° \Rightarrow \sin(\angle VAO) = \frac{VO}{VA} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$ $\mathbf{\sin(\angle VAO) = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

c) $\left.\begin{array}{l} OE \perp BC \\ VE \perp BC \\ OE, VE \subset (VOE) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (VOE)$; Construiesc $OM \perp VE$. Deoarece $OM \subset (VOE) \Rightarrow BC \perp OM \Rightarrow$

$\Rightarrow OM \perp BC$. Din $\left.\begin{array}{l} OM \perp VE \\ OM \perp BC \\ VE, BC \subset (VBC) \end{array}\right\} \Rightarrow OM \perp (VBC) \Rightarrow$ **d (O ; (VBC) = OM**

In $\Delta VOE, \angle E=90° \Rightarrow OM = \frac{OV \cdot OE}{VE} = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\mathbf{OM = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$ **cm**

d) Calculez sinusul unghiului dintre fețele VBC si ABC

$\left.\begin{array}{l} (VBC) \cap (ABC) = BC \\ VE \perp BC; VE \subset (VBC) \\ AE \perp BC; AE \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle(\mathbf{(VBC) ; (ABC)}) = \angle(VE ; AE) = \angle(\mathbf{VEA})$

In ΔVOE dr. in O $\Rightarrow \sin\angle(VEO) = \frac{VO}{VE} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{18}}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ $\mathbf{\sin\angle(VEA) = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

2. Un tetraedru regulat SABC are volumul $144\sqrt{2}$ cm³. Se cere:

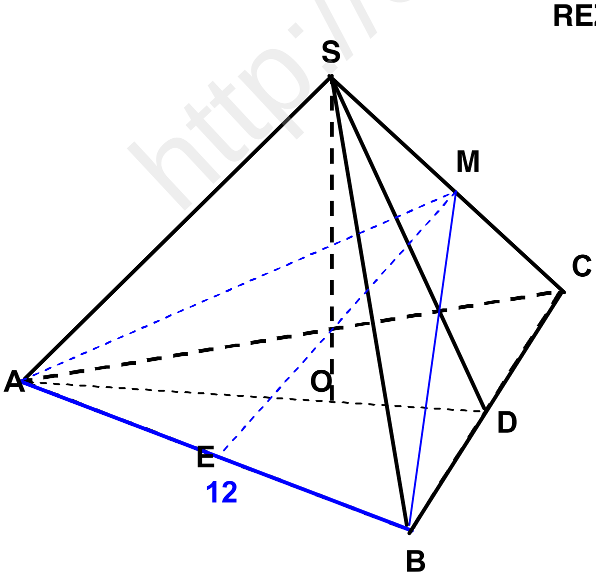
a) Aria laterala si aria totala a tetraedrului.

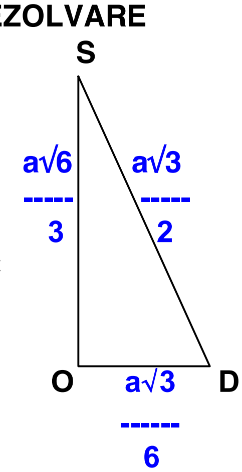
b) Distanta de la centrul bazei la o muchie laterala

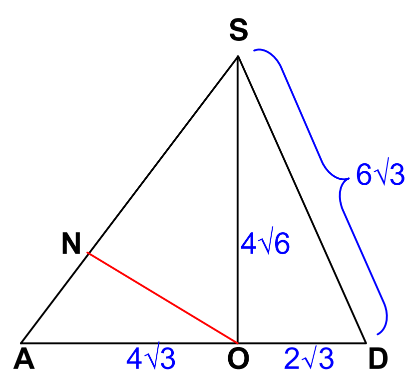
c) Cosinusul unghiului dintre inaltimea tetraedrului si o fața laterala.

d) Pozitia unui punct M pe muchia SC astfel incat aria triunghiului ABM sa fie minima.

REZOLVARE







a) Scriu volumul tetraedrului in functie de muchia lui, muchie care o notez cu *a*

$$\textbf{Volumul} = \frac{\textbf{Aria bazei} \cdot \textbf{inaltimea}}{3}$$

Deoarece baza este Δ echilateral $\Rightarrow$ **Aria bazei** $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Inaltimea tetraedrului o calculez din ΔSOD, dupa ce exprim laturile lui in functie de *a*

SD este inaltimea unui Δ echilateral de latura *a* $\Rightarrow$ $\mathbf{SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Inaltimea bazei $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OD = \dfrac{1}{3} \cdot AD \Rightarrow OD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathbf{OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}}$

In ΔSOD dr. in O $\Rightarrow SO^2 = SD^2 - OD^2 \Rightarrow SO^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{^{9)}3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{36} = \dfrac{27a^2 - a^2}{36} = \dfrac{24a^2}{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow SO = \sqrt{\dfrac{24a^2}{36}} \Rightarrow SO = \dfrac{2a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \mathbf{SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}$

Volumul tetraedrului $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{18}}{36} = \dfrac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36} = \mathbf{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}} \Rightarrow \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 144\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3\sqrt{2} = 12 \cdot 144\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \Rightarrow a^3 = 12^3 \Rightarrow$ **a =12cm**

Inaltimea tetraedrului **SO=4√6 cm ;** Apotema tetraedrului **SD=6√3 cm** ; Apotema bazei **OD=2√3 cm**

Aria bazei **Ab = 36√3 cm^2** ; Perimetrul bazei **Pb = 36 cm** ; Inaltimea bazei **AD = 6√3 cm**

Aria laterala a tetraedrului = 3 · Aria unui triunghi echilateral = 3 · Aria bazei = 108√3 cm^2

Aria totala = 4 · Aria unui triunghi echilateral = 4 · Aria bazei = 144√3 cm^2 .

b) d(O ; SA) $\Rightarrow$ formez ΔOSA in care construiesc $ON \perp SA \Rightarrow$ **d(O ; SA) = ON**

In ΔOSA dr. in O , cu ON inaltime din O $\Rightarrow ON = \dfrac{SO \cdot OA}{SA} = \dfrac{4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{12} = \dfrac{16 \cdot 3\sqrt{2}}{12} = 4\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$

d(O ; SA) = ON = 4√2 cm .

c) ∠ (SO ; (SBC))

Proiectia segmentului SO pe planul (SBC) se afla pe SD $\Rightarrow \angle (SO ; (SBC)) = \angle(SO;SD) = \angle(OSD)$

In ΔSOD dr. in O $\Rightarrow \cos\angle(OSD) = \dfrac{SO}{SD} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ $\mathbf{\sin \angle(SO ; (SBC)) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

d) Triunghiul ABM este isoscel cu AM≡BM (deoarece fețele laterale ale tetraedrului sunt congruente)

In aceasta situatie inaltimea ME construita din M este si mediana ⇒ E este la mijlocul muchiei AB

Aria $\Delta ABM = \dfrac{AB \cdot ME}{2}$; AB fiind muchie a tetraedrului are valoare constanta
ME are valore variabila deoarece punctul M se deplaseaza e muchia SC

Aria ΔABM este minima cand ME are valoare minima, adica, cand $ME \perp SC$

Deoarece $ME \subset (ABM) \Rightarrow ME \perp SC$ cand $(ABM) \perp SC$

Construiesc $BM \perp SC$ si $AM \perp SC$; deoarece BM si AM sunt 2 drepte concurente din planul (ABM) ⇒
⇒ $(ABM) \perp SC$

Deoarece fețele laterale ale tetraedrului sunt Δechilaterale, inaltimile lor sunt si mediane ⇒ BM siAM sunt mediane ⇒ M este la mijlocul muchiei SC

In concluzie: **aria ΔABM este minima cand M este la mijlocul muchiei SC**.

3. Volumul unui tetraedru regulat cu suma muchiilor 60 cm este.............

REZOLVARE

Muchia tetraedrului $= \dfrac{\text{suma muchiilor}}{6} = \dfrac{60}{6} = \mathbf{10\ cm}$

Scriu volumul tetraedrului in functie de muchia lui ⇒ $\mathbf{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ (formula dedusa la problema 2)

Volumul $= \dfrac{10^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{1000\sqrt{2}}{12} = \mathbf{\dfrac{250\sqrt{2}}{3}\ cm^3}$ **.**

4. Aria totala a unui tetraedru regulat cu volumul $16\sqrt{6}$ cm^2 este ....

REZOLVARE

Din formula volumului, exprimata in functie de muchie, determin muchia tetraedrului.

$\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 16\sqrt{6} \Rightarrow a^3\sqrt{2} = 12 \cdot 16\sqrt{6} \Rightarrow a^3 = 12 \cdot 16\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 4^3 \cdot (\sqrt{3})^3 \Rightarrow \mathbf{a = 4\sqrt{3}}$

Aria totala $= 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = (4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 48\sqrt{3}\ cm^2 \Rightarrow$ **Aria totala = $48\sqrt{3}$ cm^2 .**