

Teste matematica propuse 2005 – TEST 5

PARTEA I (45 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai rezultatele.

- 3p 1. a) Valoarea sumei $5 + 10 + 15 + \dots + 100$ este
- 3p b) Daca $(x + 3)^2 + (2y - 1)^2 = 0$, atunci $x = \dots$ si $y = \dots$
- 3p c) Daca numarul $46x8$ este divizibil cu 3, atunci $x \in \{\dots\}$
- 3p 2. a) Un obiect costa 100.000 lei. Dupa 2 scumpiri succesive cu cate 10% va costa.....lei
- 3p b) Daca $\frac{2x - 3y}{x + 2y} = 0, (3)$ atunci $\frac{x}{y} = \dots$
- 3p c) Fiind date numerele 12, 15, 30, atunci c.m.m.d.c. al lor este% din c.m.m.m.c. al lor
- 3p 3. a) Expresia $5x^2(x - 1) - 3x(x - 1)$ descompusa in factori este
- 3p b) Daca $A(-2;a)$ apartine graficului functiei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3,5x + 2$ atunci $a = \dots$
- 3p c) Elementele multimii $A = \{x / x \in \mathbb{N}, 2 + \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{5}\}$ sunt

4. In figura 1 ΔABC este dreptunghic in A, $AD \perp BC$, $CD = 2\text{cm}$, $DB = 6\text{cm}$.

- 3p a) Lungimea segmentului $AD = \dots \text{cm}$
- 3p b) Perimetrul $\Delta ABC = \dots \text{cm}$
- 3p c) Aria cercului circumscris triunghiului $ABC = \dots \text{cm}^2$

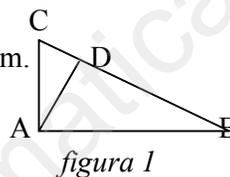


figura 1

5. In figura 2 este o sfera de centru O, raza AO , cu aria $= 144\pi \text{ cm}^2$. D este mijlocul lui AO , iar $MN \parallel BC$.

- 3p a) Volumul sferei este egal cu cm^3 .
- 3p b) Volumul conului ABC este egal cu cm^3
- 3p c) Volumul trunchiului de con $BCNM$ este egal cu cm^3

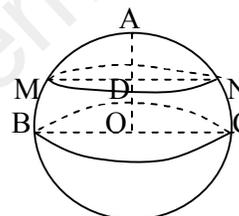


figura 2

PARTEA a II –a (45 puncte)- Pe foaia de examen scrieti rezolvarile complete.

1. Pretul unui obiect s-a majorat cu 20%. Dupa un timp noul pret se micșoreaza cu 20%. Dupa aceste modificari obiectul costa 192.000 lei.

- 5p a. Care a fost pretul initial al obiectului?
- 5p b. Cat la suta reprezinta pretul final din pretul initial?

2. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x+2} + \frac{4x}{4-x^2} + \frac{x}{x-2} \right) : \frac{x^2-3x}{x+2}$

- 5p a) Determinati valorile reale ale lui a pentru care $E(a)$ are sens.
- 5p b) Aratati ca $E(x) = \frac{2}{x-3}$
- 5p c) Determinati $b \in \mathbb{Z}$, astfel incat $E(b) \in \mathbb{Z}$

3. In figura 3 $ABB'C'$ este un trunchi de con cu sectiunea axiala un trapez isoscel ortodiagonal, cu linia mijlocie de 16cm si segmentul care uneste mijloacele diagonalelor de 12 cm. Diagonalele trapezului se intersecteaza in punctul P, iar O si O' sunt centrele bazelor.

- 4p a) Completati pe foaia de examen desenul din figura 3 cu conul din care provine trunchiul.
- 4p b) Aratati ca $OB = 14\text{cm}$; $O'B' = 2\text{cm}$; $BB' = 20\text{cm}$
- 4p c) Calculati aria totala si volumul trunchiului
- 4p d) Calculati volumul conului din care provine trunchiul
- 4p e) Calculati aria laterala a conului PAB

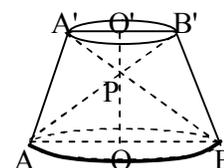


figura 3

REZOLVARE TEST 5

PARTEA I

$$1. a) 5 + 10 + 15 + \dots + 100 = 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = 5 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 5 \cdot 10 \cdot 21 = \mathbf{1050}$$

* Suma numerelor naturale consecutive de la **1** la **n** : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

b) $(x + 3)^2 + (2y - 1)^2 = 0$ **O suma de patrate perfecte este 0 daca fiecare termen este 0** \Rightarrow
 $\Rightarrow (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = \mathbf{-3}$

$$(2y - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

c) **Un numar este divizibil cu 3 daca suma cifrelor lui se imparte la 3**

$\overline{46x8}$, $4 + 6 + 8 = 18$, $18 + x$ este divizibil cu 3 daca x ia valorile 0, 3, 6, 9

$$x \in \{0, 3, 6, 9\}$$

2. a) Dupa prima scumpire obiectul costa $\frac{100 + 10}{100} \cdot 100.000 = \frac{110}{100} \cdot 100.000 = 110.000$ lei

Dupa a doua scumpire costa $\frac{100 + 10}{100} \cdot 110.000 = \frac{110}{100} \cdot 110.000 = 121.000$ lei

Deci dupa cele 2 scumpiri **obiectul costa 121.000 lei**

***Atentie! Cand se fac mai multe modificari de pr\u011et succesive NU insumati procentele de modificare ci aflati pretul dupa fiecare modificare**

b) $0, (3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x - 3y}{x + 2y} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cdot (2x - 3y) = 1 \cdot (x + 2y) \Rightarrow 6x - 9y = x + 2y \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6x - x = 2y + 9y \Rightarrow 5x = 11y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{11}{5}$$

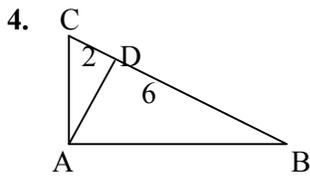
c)
$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline D = 3 \\ M = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \end{array}$$

$$\frac{p}{100} \cdot 60 = 3 \Rightarrow 60 \cdot p = 3 \cdot 100 / : 60 \Rightarrow p = 300 : 60 \Rightarrow p = \mathbf{5\%}$$

3. a) $5x^2 \cdot (x - 1) - 3x \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (5x^2 - 3x) = \mathbf{x(x - 1)(5x - 3)}$

b) Daca $A(-2 ; a) \in Gf \Rightarrow f(-2) = a$ Calculez $f(-2) \Rightarrow f(-2) = -3,5 \cdot (-2) + 2 = 7 + 2 = \mathbf{9} \Rightarrow a = \mathbf{9}$

c) Primul numar natural mai mare decat $2 + \sqrt{3}$ este $2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = \mathbf{4}$
 Primul numar natural mai mic decat $3 + \sqrt{5}$ este $3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = \mathbf{5}$ $\Rightarrow A = \{4, 5\}$



a) Aplic teorema inaltimii $\Rightarrow AD^2 = CD \cdot DB$

$$AD^2 = 2 \cdot 6 \Rightarrow AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

b) Aplic teorema catetei $\Rightarrow CA^2 = CD \cdot CB$

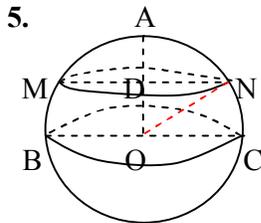
$$BA^2 = BD \cdot BC$$

$$CA^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow CA = \sqrt{16} \Rightarrow CA = 4, \quad BA^2 = 6 \cdot 8 = 48 \Rightarrow BA = \sqrt{48} \Rightarrow BA = 4\sqrt{3}$$

Perimetrul $\Delta ABC = AB + AC + BC = 4\sqrt{3} + 4 + 8 = 12 + 4\sqrt{3}$ cm

c) Deoarece Δ dreptunghic se inscrie intr-un semicerc, raza cercului circumscris $R = \frac{\text{ipotenuza}}{2}$

$$R = 8 : 2 \Rightarrow R = 4 \text{ cm} \quad \text{Aria cercului} = \pi \cdot R^2 \Rightarrow \text{Aria cercului circumscris} = 16\pi \text{ cm}^2$$



a) Aria sferei = $4 \cdot \pi \cdot R^2$ Volumul sferei = $\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = 144 \cdot \pi / : 4 \cdot \pi \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 216}{3}$$

$$\text{Volumul sferei} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 216}{3} = 4 \cdot \pi \cdot 72 = 288\pi \text{ cm}^3$$

b) Volumul conului = $\frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6}{3} = \pi \cdot 36 \cdot 3 = 108\pi \text{ cm}^3$ (inaltimea conului $AO=R$)

c) In ΔODN dreptunghic cu $OD = R / 2 \Rightarrow OD = 3 \text{ cm}$; $ON = R = 6 \text{ cm} \Rightarrow DN^2 = ON^2 - OD^2$
 $\Rightarrow DN^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow DN = \sqrt{27} \Rightarrow DN = 3\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow r = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

$$\text{Volumul trunchiului de con} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 3}{3} \cdot (36 + 27 + 18\sqrt{3}) = (63 + 18\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$$

PARTEA a II a

1. a) Notez pretul initial cu x

$$\text{Dupa prima modificare pretul creste cu 20\% si devine } p1 = \frac{100 + 20}{100} \cdot x = \frac{120}{100} \cdot x = \frac{6 \cdot x}{5}$$

$$\text{Dupa a doua modificare pretul se micsoareaza cu 20\% si devine } p2 = \frac{100 - 20}{100} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{80}{100} \cdot \frac{6x}{5}$$

$$p2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{24x}{25} \Rightarrow \frac{24x}{25} = 192.000 \Rightarrow 24x = 25 \cdot 192.000 \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 192.000}{24} = 200.000$$

Pretul initial a fost 200.000 lei

b) $\frac{p}{100} \cdot \text{prêt initial} = \text{prêt final} \Rightarrow \frac{p}{100} \cdot 200.000 = 192.000 \Rightarrow p = \frac{192.000 \cdot 100}{200.000} = \frac{192}{2} = 96\%$

pretul final reprezinta 96% din pretul initial

2. a) Expresia are sens cand numitorii fractiilor sunt diferiti de zero, iar la fractia in fata careia este semnul impartirii si numaratorul trebuie sa fie diferit de zero.

$$E(a) = \left(\frac{a}{a+2} + \frac{4a}{4-a^2} + \frac{a}{a-2} \right) : \frac{a^2-3a}{a+2}$$

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2; a-2=0 \Rightarrow a=2; a^2-3a=0 \Rightarrow a(a-3)=0 \Rightarrow a=0, a-3=0 \Rightarrow a=3$$

$$a \in \{-2, 0, 2, 3\} \text{ Deoarece } E(a) \text{ are sens in } a \Rightarrow a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2, 3\}$$

$$b) E(x) = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} \right) \cdot \frac{x+2}{x(x-3)} = \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{4x}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+2}{x-2} \right) \cdot \frac{x+2}{x(x-3)}$$

$$E(x) = \frac{x(x-2) - 4x + x(x+2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x(x-3)} = \frac{x^2 - 2x - 4x + x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x(x-3)} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x(x-3)}$$

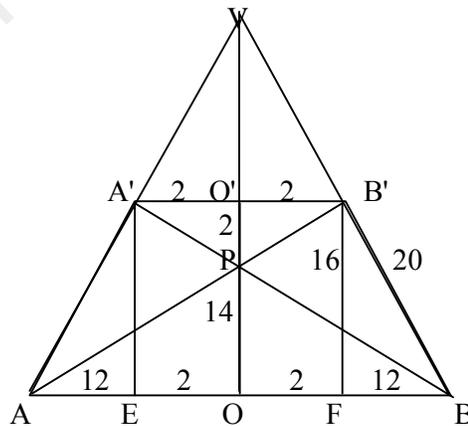
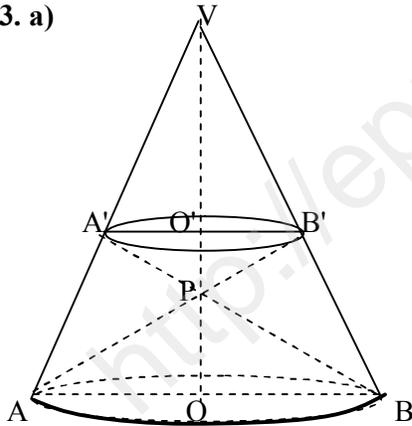
$$E(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x(x-3)} = \frac{2}{x-3} \Rightarrow \mathbf{E(x) = \frac{2}{x-3}}$$

$$c) \text{ Daca } E(x) = \frac{2}{x-3} \Rightarrow E(b) = \frac{2}{b-3} \quad E(b) \in \mathbf{Z} \text{ daca } (b-3) = \text{divizorii lui } 2 \Rightarrow (b-3) \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$b-3=-1 \Rightarrow b=-1+3 \Rightarrow \mathbf{b=2}, b-3=1 \Rightarrow b=1+3 \Rightarrow \mathbf{b=4}, b-3=-2 \Rightarrow b=-2+3 \Rightarrow \mathbf{b=1}, b-3=2 \Rightarrow \mathbf{b=5}$$

$$\mathbf{E(b) \in \mathbf{Z} \text{ daca } b \in \{1, 2, 4, 5\}}$$

3. a)



b)

$$\text{Linia mijlocie in trapez} = \frac{\text{Baza mare} + \text{baza mica}}{2} = \frac{B+b}{2} = 16$$

$$\text{Segmentul care uneste mijloacele diagonalelor} = \frac{\text{Baza mare} - \text{baza mica}}{2} = \frac{B-b}{2} = 12$$

$$\text{In trapezul ortodiagonal (cu } d_1 \perp d_2) \Rightarrow \text{inaltimea} = \frac{\text{Baza mare} + \text{baza mica}}{2} \Rightarrow h = \frac{B + b}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{B + b}{2} = 16 \\ \frac{B - b}{2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + b = 32 \\ B - b = 24 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow \frac{2B}{2} = \frac{56}{2} \Rightarrow B = 28 \Rightarrow 28 + b = 32 \Rightarrow b = 32 - 28 \Rightarrow b = 4$$

$$AB = 28 \text{ cm} \Rightarrow OB = 14 \text{ cm} \Rightarrow R = 14 \text{ cm}$$

$$A'B' = 4 \text{ cm} \Rightarrow O'B' = 2 \text{ cm} \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

$$OO' = \frac{AB + A'B'}{2} = \frac{28 + 4}{2} = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow OO' = 16 \text{ cm} \quad FB = OB - OF = 14 - 2 = 12 \quad FB = 12 \text{ cm}$$

$$\text{In } \Delta B'FB \text{ dr} \Rightarrow B'B^2 = B'F^2 + FB^2 \Rightarrow B'B^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow B'B = \sqrt{400} \Rightarrow B'B = 20 \text{ cm}$$

$$\text{c) Volumul trunchiului} = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 16}{3} (196 + 4 + 28) = \frac{16 \cdot \pi}{3} \cdot 228 = 16 \cdot \pi \cdot 76$$

$$\text{Volumul trunchiului de con} = 1216\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Aria laterala a trunchiului de con} = \pi \cdot (R + r) \cdot G = \pi \cdot (14 + 2) \cdot 20 = \pi \cdot 16 \cdot 20 = 320\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Aria totala a trunchiului} = \text{Aria laterala} + \text{Aria bazei mari} + \text{Aria bazei mici}$$

$$\text{Aria bazei mari} = \pi R^2 = 196\pi \text{ cm}^2; \text{ Aria bazei mici} = \pi r^2 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Aria totala a trunchiului} = 320\pi + 196\pi + 4\pi = 520\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{d) } O'B' \parallel OB \Rightarrow \Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} \Rightarrow \frac{VO - 16}{VO} = \frac{2}{14} = \frac{VB - 20}{VB}$$

$$\frac{VO - 16}{VO} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7 \cdot (VO - 16) = VO \Rightarrow 7VO - 112 = VO \Rightarrow 7VO - VO = 112 \Rightarrow 6VO = 112$$

$$\Rightarrow VO = \frac{112}{6} = \frac{56}{3} \Rightarrow VO = \frac{56}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Volumul conului} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot VO}{3} = \frac{\pi \cdot 196}{3} \cdot \frac{56}{3} = \frac{10976\pi}{9} \text{ cm}^3$$

$$\text{e) Aria laterala con} = \pi R G \Rightarrow \text{Aria laterala con PAB} = \pi \cdot OB \cdot PB$$

$$\text{In } \Delta POB \text{ dr.} \Rightarrow PB^2 = PO^2 + OB^2 = 14^2 + 14^2 = 196 + 196 = 392 \Rightarrow PB = \sqrt{392} \Rightarrow PB = 14\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Aria laterala con PAB} = \pi \cdot 14 \cdot 14\sqrt{2} = 196\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$$