

Teste matematica propuse 2005 – TEST 3

PARTEA I (45 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai rezultatele.

- 3p 1. a) Diferenta numerelor 1,(6) si 1,1(6) este egala cu
- 3p b) In intervalul [79;129] exista un numar de numere naturale
- 3p c) Dintre numerele $2\sqrt{6}$ si 5 mai mare este numarul
- 3p 2. a) Elementele multimii $A = \{x / x \in \mathbb{Z}^*, 2 \geq -x > -3\}$ sunt
- 3p b) Cel mai mic numar natural care impartit pe rand la 12, 18, 20 da de fiecare data restul 7 este...
- 3p c) Daca $\frac{x}{y} = 0,(6)$, atunci valoarea raportului $\frac{2x - y}{x + y}$ este
- 3p 3. a) Fie functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m - 1$. Daca graficul functiei trece prin origine, atunci $m = \dots$
- 3p b) Fie functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$. Rezultatul calculului $f(2) - 3 \cdot f(-2)$ este egal cu
- 3p c) Functia al carei grafic contine punctele $A(2; 9)$ si $B(-2; 1)$ este $f(x) = \dots$

4. In figura 1 pe circumferinta cercului de centru O si raza de 6cm se iau punctele A si B astfel incat masura unghiului $AOB = 60^\circ$

- 3p a) Lungimea cercului este.....cm, iar aria discului este cm^2
- 3p b) Lungimea arcului mare AB estecm.
- 3p c) Aria sectorului mic AOB este ... cm^2

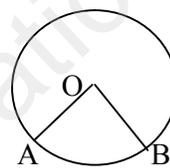


figura 1

5. In figura 2 $ABB'A'$ este un trunchi de con circular drept cu $O'B' = 2\text{cm}$; $OB = 3\text{cm}$; $BB' = \sqrt{17}\text{cm}$

- 3p a) Volumul trunchiului de con $ABB'A'$ este..... cm^3 .
- 3p b) Aria laterala a conului $O'AB$ este cm^2 .
- 3p c) Aria totala a cilindrului $A'B'DC$ este..... cm^2

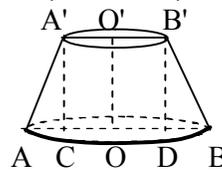


figura 2

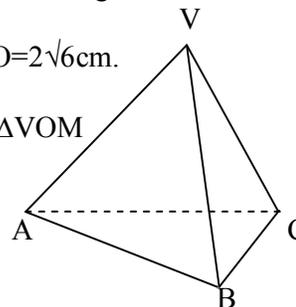
PARTEA a II –a (45 puncte)- Pe foaia de examen scrieti rezolvarile complete.

1. Fie numerele naturale a, b, c. Primele doua sunt direct proportionale cu 6 si 8, ultimele doua sunt invers proportionale cu 0,25 si 0,1(6) iar suma patratelor lor este 61
- 6p a. Aflati numerele a, b, c.
- 4p b. Daca $a=3$, $b=4$, $c=6$, ce procent reprezinta $(a + c)$ din $(b + c)$?
2. Fie expresia $E(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x} : \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 7x^2 + 10x}$

- 3p a) Aratati ca $x^3 + 7x^2 + 10x = x \cdot (x + 2) \cdot (x + 5)$
- 3p b) Aratati ca $x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$
- 5p c) Determinati valorile lui a pentru care $E(a)$ are definita valoarea in a
- 4p d) Determinati valorile intregi ale lui b astfel incat $E(b)$ sa fie numar intreg.

3. In figura alaturata VABC este un tetraedru regulat cu inaltimea $VO = 2\sqrt{6}\text{cm}$. Punctul O este centrul bazei, iar M este mijlocul laturii BC.

- 4p a) Completati pe foaia de examen desenul din figura alaturata cu ΔVOM
- 4p b) Aratati ca $AB = 6\text{cm}$
- 4p c) Calculati aria totala si volumul piramidei
- 4p d) Calculati distanta de la punctul M la planul (VAB)
- 4p e) Calculati sinusul unghiului dintre segmentele VM si AC



REZOLVARE TEST 3

PARTEA I

1. a) $1,(6) = 1,66666\dots \Rightarrow 1,66666\dots - 1,1(6) = 0,5$
 $1,1(6) = 1,16666\dots \Rightarrow \frac{1,66666\dots - 1,16666\dots}{0,500000\dots} = 0,5$

- b) Pentru a afla numarul de numere din interval se face urmatorul calcul : $(129 - 79) + 1$
 Rezultatul acestui calcul este $50 + 1 = 51$, deci in interval sunt **51 numere naturale**
 Daca intervalul este deschis la unul din capete **nu se mai aduna 1**
 Daca intervalul este deschis la ambele capete in loc sa se adune **se scade 1**

- c) Pentru a compara 2 radicali sau un numar intreg cu un radical, se ridica numerele la patrat.
 $(2\sqrt{6})^2 = 24$
 $5^2 = 25$, deoarece $25 > 24 \Rightarrow 5 > 2\sqrt{6} \Rightarrow$ **numarul mai mare este 5**

2. a) Mai intai se rezolva inacuatia: $2 \geq -x > -3 \cdot (-1) \Rightarrow -2 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [-2 ; 3)$

Deoarece $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow A = \{-2, -1, 1, 2\}$, deoarece $x \in \mathbb{Z}^*$ in multime nu apare elementul 0

- * **Nu uita ! Daca intr-o inecuatie necunoscuta este negativa inmulteste inecuatia cu (-1)**
La inmultirea(impartirea) unei inecuatii cu (-1) se schimba si SENSUL INEGALITATII

b) $n : 12 = c_1 \text{ rest } 7 \quad n = 12 \cdot c_1 + 7 \quad n - 7 = 12 \cdot c_1$
 $n : 18 = c_2 \text{ rest } 7 \text{ se aplica teorema impartirii cu rest } \Rightarrow n = 18 \cdot c_2 + 7 \Rightarrow n - 7 = 18 \cdot c_2 \Rightarrow$
 $n : 20 = c_3 \text{ rest } 7 \quad (\mathbf{D = I \cdot C + R}) \quad n = 20 \cdot c_3 + 7 \quad n - 7 = 20 \cdot c_3$

$\Rightarrow (n - 7) = \mathbf{M(12, 18, 20)}$, adica multiplul comun al numerelor 12, 18, 20

$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \\ \hline M = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 20 \cdot 9 = 180 \Rightarrow n-7=180 \Rightarrow \mathbf{n=187} \end{array}$$

*(la calculul multiplului comun se iau toti termenii comuni si necomuni o singura data la puterea cea mai mare)

c) $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2 \cdot k \text{ si } y = 3 \cdot k \Rightarrow \frac{2x - y}{x + y} = \frac{2 \cdot 2k - 3k}{2k + 3k} = \frac{k}{5k} = \frac{1}{5}$

3. a) Daca graficul trece prin origine $\Rightarrow \mathbf{O(0, 0) \in Gf} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + m - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{m = 1}$

b) $f(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 4 + 5 = 9$
 $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 5 = -4 + 5 = 1 \Rightarrow f(2) - 3 \cdot f(-2) = 9 - 3 \cdot 1 = 9 - 3 = 6$

- c) Pentru a determina o functie se scrie mai intai forma ei generala : $\mathbf{f(x) = a \cdot x + b}$

$A(2 ; 9) \in Gf \Rightarrow \mathbf{f(2) = 9}$; $B(-2 ; 1) \in Gf \Rightarrow \mathbf{f(-2) = 1}$

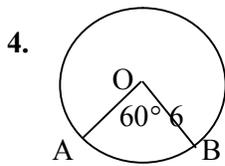
Calculez $f(2)$ si $f(-2) \Rightarrow f(2) = a \cdot 2 + b = 2a + b$; $f(-2) = a \cdot (-2) + b = -2a + b$

Inlocuiesc pe $f(2)$ si $f(-2)$ in ecuatiile de mai sus si va rezulta sistemul :

$$\begin{cases} 2a + b = 9 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$$

$/ \quad 2b = 10 \Rightarrow \mathbf{b = 5}$, inlocuiesc pe b in prima ecuatie $\Rightarrow 2a + 5 = 9 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \mathbf{a = 2}$

Inlocuiesc pe a si b in forma generala a ecuatiei $\Rightarrow \mathbf{f(x) = 2x + 5}$



a) Lungimea cercului = $2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 6 = 12\pi$ cm
 Aria discului = $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ cm²

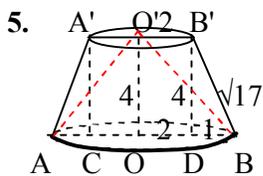
b) In problemele cu arce de cerc se poate utiliza urmatoarea relatie de unde se pot deduce mai multe formule:

$$\frac{\angle \text{arc}}{360^\circ} \dots \dots \dots \text{lungime arc} \Rightarrow \frac{\text{Lcerc} \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{12\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 2\pi \text{ cm}$$

Lungimea arcului mare AB = L cerc - L arc mic AB = $12\pi - 2\pi = 10\pi$ cm

c) In problemele cu sectoare de cerc se poate utilize urmatoarea relatie de unde se pot deduce mai multe formule:

$$\frac{\angle \text{sector}}{360^\circ} \dots \dots \dots \text{arie sector} \Rightarrow \frac{\text{arie cerc} \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{36\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi \text{ cm}^2$$



a) Calculez inaltimea trunchiului de con din $\Delta B'DB \Rightarrow B'D^2 = B'B^2 - DB^2 \Rightarrow B'D^2 = (\sqrt{17})^2 - 1^2 = 17 - 1 = 16 \Rightarrow B'D = \sqrt{16} \Rightarrow B'D = 4$ cm

$$V \text{ trunchi} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 3}{3} \cdot (4^2 + 2^2 + 4 \cdot 2) = \pi \cdot (16 + 4 + 8) = 28\pi \text{ cm}^3$$

b) Aria laterala a conului = $\pi \cdot R \cdot G$, Calculez generatoarea O'B a conului O'AB din $\Delta O'OB$ dr. $\Rightarrow O'B^2 = O'O^2 + OB^2 \Rightarrow O'B^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow O'B = \sqrt{25} \Rightarrow O'B = 5$ cm

Aria laterala a conului = $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$ cm²

c) Aria cilindrului = Aria laterala + 2 · Aria bazei Atentie! Raza cilindrului = $r = O'D' = 2$ cm

Aria laterala = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot G = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$ cm², Aria bazei = $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm²

Aria totala a cilindrului = $16\pi + 2 \cdot 4\pi = 16\pi + 8\pi = 24\pi$ cm²

PARTEA a II a

1. a) Transform $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $0,1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Daca {a, b} sunt direct proportionale cu {6, 8} $\Rightarrow a = 6 \cdot k$ si $b = 8 \cdot k$

Daca {b, c} sunt invers proportionale cu $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\}$ $\Rightarrow b = 4 \cdot r$ si $c = 6 \cdot r$

Din $b = 8 \cdot k$ si $b = 4 \cdot r \Rightarrow 4 \cdot r = 8 \cdot k / :4 \Rightarrow r = 2 \cdot k \Rightarrow c = 6 \cdot 2 \cdot k \Rightarrow c = 12 \cdot k$

Deci $a = 6 \cdot k$ $b = 8 \cdot k$ $c = 12 \cdot k$

Suma patratelor numerelor este $a^2 + b^2 + c^2 = 61 \Rightarrow (6k)^2 + (8k)^2 + (12k)^2 = 61 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 36k^2 + 64k^2 + 144k^2 = 61 \Rightarrow 244k^2 = 61 / :244 \Rightarrow k^2 = \frac{61}{244} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a = 6 / 2 = 3$, $b = 8 / 2 = 4$, $c = 12 / 2 = 6 \Rightarrow a=3, b=4, c=6$

b) Rezolv ecuatiia : $\frac{p}{100} \cdot (b+c) = (a+c) \Rightarrow \frac{p}{100} \cdot 10 = 9 \Rightarrow p = \frac{100 \cdot 9}{10} = 90 \Rightarrow p = 90\%$

$$2. a) x^3 + 7x^2 + 10x = x \cdot (x^2 + 7x + 10) = x \cdot (x^2 + 2x + 5x + 10) = x \cdot [x \cdot (x+2) + 5 \cdot (x+2)] = x(x+2)(x+5)$$

$$b) x^2 - x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6 = x \cdot (x-3) + 2 \cdot (x-3) = (x-3)(x+2)$$

* La acest tip de descompuneri in general se scrie termenul din mijloc ca o suma algebrica de 2 termeni. Pentru aceasta se poate utiliza urmatoarea metoda :

se cauta doua numere care a caror suma algebrica sa fie egala cu coeficientul termenului care se descompune si a caror produs sa fie egal cu termenul liber.

Concret! La polinomul $x^2 + 7x + 10$ am cautat 2 numere care inmultite sa fie 10 , am gasit 2 si 5 apoi le-am dat semnele algebrice astfel incat insumate sa fie +7 si au rezultat numerele +2 si +5, deci pe 7x l-am scris +2x + 5x

La polinomul $x^2 - x - 6$, am gasit 3 si 2 care inmultite sa dea 6, apoi ca insumate sa dea rezultatul -1 (coeficientul lui x) le-am dat semnele -3 si +2, deci pe -x l-am scris -3x + 2x

$$c) \text{ Pentru a determina } E(a) \text{ inlocuim in } E(x) \text{ pe } x \text{ cu } a \Rightarrow E(a) = \frac{a^2 - 4}{a^3 - 4a} : \frac{a^2 - a - 6}{a^3 + 7a^2 + 10a}$$

$E(a)$ este definita in a daca numitorii fractiilor sunt diferiti de 0, iar la fractia in fata careia este semnul impartirii si numaratorul este diferit de zero.

Mai intai rezolv ecuatiile obtinute prin egalarea cu 0 a numitorilor amintiti mai sus.

$$a^3 - 4a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a(a-2)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 0, a-2=0 \Rightarrow a=2, a+2=0 \Rightarrow a = -2$$

$$a^3 + 7a^2 + 10a = 0 \Rightarrow a(a^2 + 7a + 10) = 0 \Rightarrow a(a+2)(a+5) = 0 \Rightarrow a+5=0 \Rightarrow a = -5$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a-3=0 \Rightarrow a = 3$$

$$a \in \{-5, -2, 0, 2, 3\} \text{ Deoarece } E(a) \text{ trebuie sa aiba valoarea definite in } a \Rightarrow a \in \mathbf{R \setminus \{-5, -2, 0, 2, 3\}}$$

$$d) \text{ Rezolv } E(x) \Rightarrow E(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x^2-4)} : \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)(x+5)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x(x+2)(x+5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+5}{x-2}$$

$$\text{Deoarece } E(x) = \frac{x+5}{x-2} \Rightarrow E(b) = \frac{b+5}{b-2}$$

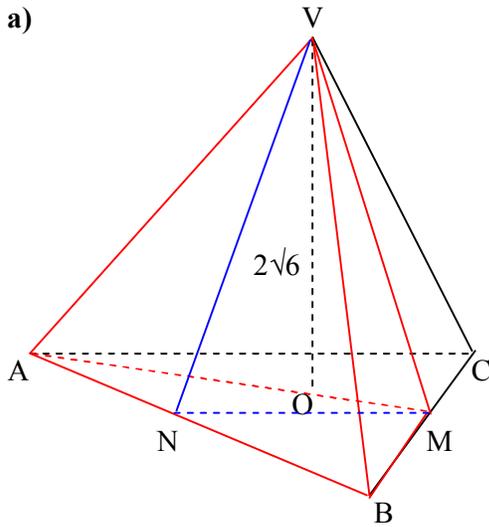
$$E(b) \text{ este numar intreg daca } \begin{array}{l} b-2 \mid b-2 \quad / \cdot (-1) \\ b-2 \mid b+5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b-2 \mid -b+2 \\ b-2 \mid b+5 \quad (+) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b-2 \mid 7 \\ b-2 \mid 7 \end{array} \Rightarrow (b-2) = D_7 \Rightarrow (b-2) \in \{\pm 1, \pm 7\}$$

$$\Rightarrow b-2 = -1 \Rightarrow b = -1 + 2 \Rightarrow b = 1, b-2 = 1 \Rightarrow b = 1 + 2 \Rightarrow b = 3$$

$$b-2 = -7 \Rightarrow b = 2 - 7 \Rightarrow b = -5, b-2 = 7 \Rightarrow b = 2 + 7 \Rightarrow b = 9$$

$$\text{Deoarece } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \{-5, 1, 3, 9\}, \text{ dar } b \neq \{-5, -2, 0, 2, 3\} \Rightarrow b \in \mathbf{\{1, 9\}}$$

3. a)



b) Tetraedru regulat are toate fetele Δ echilaterale

Apotema tetraedrului este inaltimea unui Δ echilateral

Apotema bazei este $\frac{1}{3} \cdot$ inaltimea bazei

$$VM = \frac{L\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

In ΔVOM din relatiile de mai sus $\Rightarrow VM = 3 \cdot OM$

Notam $OM = x \Rightarrow VM = 3 \cdot x$

Aplic in ΔVOM Teorema lui Pitagora si determin VM

$$\text{In } \Delta VOM \text{ dr. } \Rightarrow VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow (3x)^2 = (2\sqrt{6})^2 + x^2 \Rightarrow 9x^2 = 24 + x^2 \Rightarrow 9x^2 - x^2 = 24 \Rightarrow 8x^2 = 24 / : 8 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow VM = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow L\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} / : \sqrt{3} \Rightarrow L = 6 \Rightarrow AB = 6 \text{ cm} \Rightarrow \text{Aria bazei} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{c) Aria totala a tetraedrului} = 4 \cdot \text{Aria unei fete} = 4 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \text{Aria totala} = L^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumul tetraedrului} = \frac{\text{Aria bazei} \cdot \text{inaltimea}}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 6 \cdot \sqrt{18} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

d) $d(M; (VAB))$, formez piramida $MVAB$ si scriu volumul ei in 2 moduri

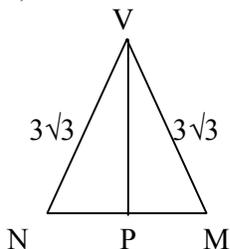
$$\left. \begin{aligned} V_{MVAB} &= \frac{\text{Aria } \Delta VAB \cdot \text{distanța } d}{3} \\ V_{VMAV} &= \frac{\text{Aria } \Delta MAB \cdot VO}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Aria } \Delta VAB \cdot d = \text{Aria } \Delta MAB \cdot VO$$

$$\Rightarrow d = \frac{\text{Aria } \Delta MAB \cdot VO}{\text{Aria } \Delta VAB}$$

$$\text{Aria } \Delta MAB = \frac{\text{Aria } \Delta ABC}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \quad ; \quad \text{Aria } \Delta VAB = \text{Aria } \Delta ABC = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{distanța } d = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{1} \cdot \frac{1}{9\sqrt{3}} = \sqrt{6} \text{ cm} \Rightarrow d(M; (VAB)) = \sqrt{6} \text{ cm}$$

e) Construiesc $MN \parallel AC \Rightarrow \angle (VM; AC) = \angle (VM; MN) = \angle (VMN)$



MN este linie mijlocie in $\Delta ABC \Rightarrow MN = AC / 2 = 6 / 2 \Rightarrow MN = 3 \text{ cm}$

$$\text{In } \Delta VPM \text{ dr. } \Rightarrow \sin \angle (VMP) = \frac{VP}{MV} = \frac{3\sqrt{11}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{33}}{6}$$

$$VP \text{ se calculeaza cu Teorema lui Pitagora din } \Delta VPM \Rightarrow VP = \frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ cm}$$