

Teste matematica propuse 2005 – TEST 2

PARTEA I (45 puncte) – Pe foaia de examen se trec numai rezultatele.

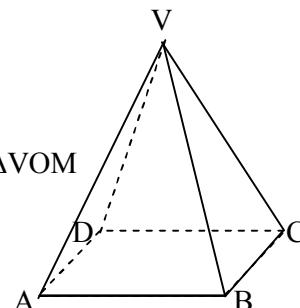
- 3p 1. Rezultatul calculului: a) $|2 - 2 \cdot 3|$ este egal cu
 b) $125 : 100$ este egal cu
 c) $\frac{2}{5}$ din 20 este egal cu
- 3p 2. a) Media geometrica a numerelor $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ si $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ este
 b) Media aritmetica a numerelor $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ si $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ este
 c) Media aritmetica ponderata a numerelor 6 si 4 cu ponderile 2 si 3 este
- 3p 3. a) Solutiile ecuatiei $x^2 - 5x + 6 = 0$ sunt

$$x^2 - 5x + 6$$

 b) Fractia ireductibila echivalenta cu $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$ este
 c) Solutiile naturale ale inecuatiei $2 > -x \geq -4$ sunt
- 3p 4. a) Aria triunghiului cu laturile 6cm, 8cm, 10 cm estecm²
 b) Aria unui patrulater ortodiagonal cu diagonalele de 6cm si 8 cm este cm²
 c) Aria unui hexagon regulat cu perimetrul de 12 cm estecm²
- 3p 5. a) Un cilindru circular drept cu aria bazei 4π cm² si inaltimea 4 cm, are aria laterală... .cm²
 b) Un con echilateral cu inaltimea $2\sqrt{3}$ cm are volumulcm³
 c) Un trunchi de con cu $r=2$ cm , $R=4$ cm si generatoarea 5 cm, are aria totala.....cm²

PARTEA a II –a (45 puncte)- Pe foaia de examen scrieti rezolvările complete.

1. Intr-un depozit se gaseste o anumita cantitate de fructe. Dupa o prima sortare ramane o cantitate egala cu 90% din cea initiala. La a doua sortare se indeparteaza 6% din cantitatea de fructe ramasa dupa prima sortare. Dupa a doua sortare au ramas in depozit 4230 Kg fructe.
 a. Aflati cantitatea de fructe care a fost initial in depozit.
 b. Aflati cantitatea de fructe care a fost indepartata la a doua sortare.
2. Fie functiile $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x + 1$ si $g: R \rightarrow R$, $g(x) = 5 - x$
 a) Determinati coordonatele punctului de intersectie a graficelor celor doua functii.
 b) Calculati aria si perimetru triunghiului format de reprezentarile grafice ale celor doua functii cu axa absciselor.
 c) Aflati unghiul dintre reprezentarile grafice ale celor doua functii.
3. In figura alaturata VABCD este o piramida patrulatera regulata. Punctul O este centrul bazei, iar M este mijlocul laturii BC. Raportul dintre aria laterală si aria bazei este 2, iar $VO = 2\sqrt{3}$ cm.
 a) Completati pe foaia de examen desenul din figura alaturata cu ΔVOM
 b) Aratati ca $VM = AB = 4$ cm
 c) Calculati aria laterală si volumul piramidei
 d) Calculati distanta de la punctul M la planul (VAD)
 e) Calculati unghiul dintre segmentele VM si DC



REZOLVARE TEST 2

Partea I.

1. a) $|2 - 2 \cdot 3| = |2 - 6| = |-4| = 4$

b) $125 : 100 = 1,25$ sau $125 : 100 = \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1,25$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{20}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8$

2. a) Media geometrica a numerelor A si B este $\sqrt{A \cdot B} \Rightarrow Mg = \sqrt{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$

Se aplica formula $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \Rightarrow Mg = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{18 - 12} = \sqrt{6}$

b) Media aritmetica a numerelor A si B este $\frac{A+B}{2} \Rightarrow Ma = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

c) Media aritmetica ponderata a numerelor A si B cu ponderile p_A si p_B este $\frac{A \cdot p_A + B \cdot p_B}{p_A + p_B}$

Media aritmetica ponderata $= \frac{6 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{12 + 12}{5} = \frac{24}{5} = 4,8$

3. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ coeficientii sunt $a = 1$ $b = -5$ $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$

$$-b \pm \sqrt{\Delta} \quad -(-5) \pm 1 \quad 5 \pm 1 \quad 5 + 1 \quad 6 \quad 5 - 1 \quad 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ iar } x_2 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Deoarece solutiile ecuatiei $x^2 - 5x + 6 = 0$ sunt 2 si 3 $\Rightarrow -5x$ se poate scrie ca $-2x - 3x$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$$

* Pentru descompunerea oricarui polinom de gradul 2, se poate egala polinomul cu 0, se afla solutiile x_1 si x_2 ale ecuatiei obtinute apoi se poate scrie polinomul sub forma $a(x - x_1)(x - x_2)$ unde a este coeficientul lui x , x_1 si x_2 sunt solutiile ecuatiei, iar x este necunoscuta polinomului

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x - 3}{x - 2}$$

c) $2 > -x \geq -4 / \cdot(-1) \Rightarrow -2 < x \leq 4 \Rightarrow x \in (-2 ; 4]$ deoarece $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

4. a) Verificam daca triunghiul este dreptunghic $\left. \begin{array}{l} a^2 = 6^2 = 36 \\ b^2 = 8^2 = 64 \\ c^2 = 10^2 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \Delta$ este dreptunghic

Aria triunghiului $= \frac{\text{cateta}1 \cdot \text{cateta}2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$

b) Patrulaterul ortodiagonal are diagonalele perpendiculare

$$\text{Aria unui patrulater ortodiagonal} = \frac{\text{diagonala}_1 \cdot \text{diagonala}_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$$

c) Latura hexagonului regulat $L = P / 6 \Rightarrow L = 12 / 6 \Rightarrow L = 2 \text{ cm}$

$$\text{Aria hexagonului regulat} = 6 \cdot \text{Aria unui } \Delta \text{ echilateral} = 6 \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

5. a) Aria laterală cilindru = $2 \cdot \pi \cdot R \cdot G$, daca Aria bazei = $4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \text{ cm}$
 Aria laterală = $2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16 \cdot \pi \text{ cm}^2$

b) Conul echilateral are în secțiune axială un triunghi echilateral cu înalțimea $h_{\Delta} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow \frac{L\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow L\sqrt{3} = 2 \cdot 2\sqrt{3} / \sqrt{3} \Rightarrow L = 4 \Rightarrow$ generatoarea $G = 4 \text{ cm}$ iar raza $R = G / 2 = 2 \text{ cm}$

$$\text{Volumul conului} = \frac{\text{Aria bazei} \cdot \text{inaltimea}}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$$

c) Aria totală a trunchiului de con = Aria laterală + Aria bazei mari + Aria bazei mici
 Aria laterală = $\pi \cdot (R + r) \cdot G = \pi(4 + 2) \cdot 5 = 30 \cdot \pi \text{ cm}^2$
 Aria bazei mari = $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16 \cdot \pi \text{ cm}^2$; Aria bazei mici = $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4 \cdot \pi \text{ cm}^2$
 Aria totală = $30 \cdot \pi + 16 \cdot \pi + 4 \cdot \pi = 50 \cdot \pi \text{ cm}^2$

PARTEA a II a

1. a) Notez cantitatea de fructe care a fost initial în depozit cu x

Aflu ce cantitate de fructe ramane după fiecare sortare

$$\text{Dupa prima sortare ramane } \frac{90}{100} \cdot x = \frac{9 \cdot x}{10}$$

$$\frac{6}{9 \cdot x} \cdot \frac{10}{3} = \frac{27 \cdot x}{500}$$

$$\text{La a doua sortare se indeparteaza } \frac{9 \cdot x}{100} \cdot \frac{10}{27 \cdot x} = \frac{100}{50 \cdot 9x} \cdot \frac{5}{27x} = \frac{500}{450x - 27x} = \frac{500}{423x}$$

$$\text{Dupa a doua sortare ramane } \frac{10}{500} - \frac{500}{500} = \frac{423x}{500} = \frac{500 \cdot 4230}{500} = 500 \cdot 4230$$

$$\text{Deoarece cantitatea ramasa este } 4230 \text{ Kg} \Rightarrow \frac{500 \cdot 4230}{500} = 4230 \Rightarrow 423x = 500 \cdot 4230 \Rightarrow x = \frac{500 \cdot 4230}{423}$$

$$\Rightarrow x = 5000 \text{ Kg} \Rightarrow \text{cantitatea de fructe initiala din depozit} = 5000 \text{ Kg}$$

$$\text{b) La a doua sortare a fost indepartata cantitatea } \frac{500}{500} = \frac{27 \cdot 10}{500} = 27 \cdot 10 = 270 \text{ Kg}$$

2. a) $f(x) = x + 1$ $g(x) = 5 - x$ Orice punct de pe graficul lui f are forma $M(x, f(x))$

Punctul de intersecție este $I(x, f(x))$, mai intai se află x apoi se inlocuiește în $f(x)$

In punctul de intersecție funcțiile sunt egale $\Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x + 1 = 5 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

calculez $f(2) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow I(2; 3)$

b) Deoarece trebuie calculat perimetru si aria unui triunghi din grafic, intai aflam punctele in care graficele celor 2 functii intersecteaza axele de coordonate, apoi reprezentam grafic cele 2 functii.

$$f(x) = x + 1$$

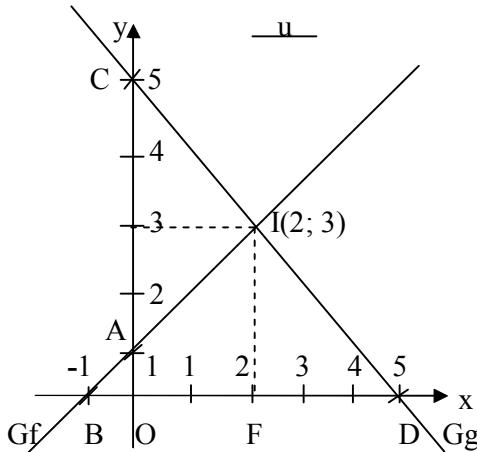
$$x=0 \Rightarrow f(0)=0+1 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow A(0, 1)$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B(-1, 0)$$

$$g(x)=5-x$$

$$x=0 \Rightarrow g(0)=5-0 \Rightarrow g(0)=5 \Rightarrow C(0, 5)$$

$$g(x)=0 \Rightarrow 5-x=0 \Rightarrow -x = -5 \cdot (-1) \Rightarrow x=5 \Rightarrow D(5, 0)$$



Suprafata dintre Gf, Gg, Ox, este ΔIBD

$$BD \cdot IF = 6 \cdot 3$$

$$\text{Aria } \Delta IBD = \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ ua}$$

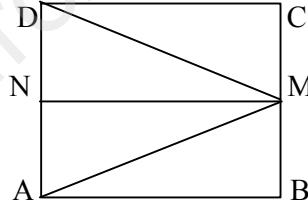
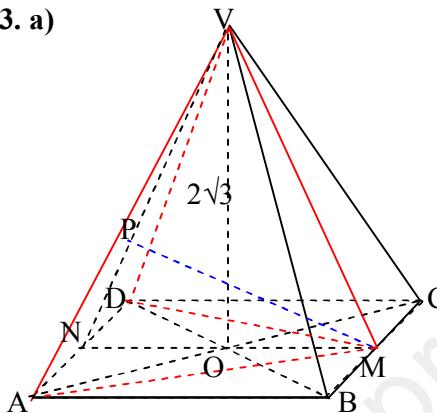
$$\text{Din } \Delta IFD \text{ dr. } \Rightarrow ID^2 = IF^2 + FD^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow ID = 3\sqrt{2} \text{ u}$$

$$\text{Din } \Delta IFB \text{ dr. } \Rightarrow IB^2 = IF^2 + FB^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow IB = 3\sqrt{2} \text{ u}$$

$$\text{Perimetrul } \Delta IBD = IB + BD + DI = 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2} \text{ u}$$

$$c) ID^2 = 18, IB^2 = 18, BD^2 = 36 \Rightarrow ID^2 + IB^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta IBD \text{ dreptunghic } \Rightarrow BI \perp DI \Rightarrow \angle(Gf, Gg) = 90^\circ$$

3. a)



$$\text{Perimetrul bazei} \cdot \text{apotema piramidei} = 4 \cdot L \cdot Ap$$

$$b) \text{ Aria laterală} = \frac{\text{Aria laterală}}{2} = \frac{4 \cdot L \cdot Ap}{2} = 2 \cdot L \cdot Ap$$

$$\text{Aria bazei} = L^2 \Rightarrow \frac{\text{Aria laterală}}{\text{Aria bazei}} = \frac{2 \cdot L \cdot Ap}{L^2} = \frac{2 \cdot Ap}{L} = \frac{2 \cdot Ap}{L} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2 \cdot Ap = 2 \cdot L \Rightarrow Ap = L$$

$$\text{Apotema bazei } OM = L / 2, \text{ deoarece } Ap = L \Rightarrow OM = Ap / 2 \Rightarrow Ap = 2 \cdot OM$$

$$\text{Notez } OM = x \Rightarrow VM = 2x; \text{ In } \Delta VOM \text{ dr. } \Rightarrow VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow (2x)^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 = 12 + x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow OM = 2 \Rightarrow AB = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow VM = AB = 4 \text{ cm}$$

$$c) \text{ Aria laterală} = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2; \text{ Volumul} = \frac{\text{Aria bazei} \cdot \text{inaltimea}}{3} = \frac{4^2 \cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

d) $d(M ; (VAD))$

Formez piramida MVAD si scriu volumul acestei piramide in doua moduri

$$\left. \begin{aligned} V_{MVAD} &= \frac{\text{Aria } \Delta VAD \cdot \text{distanta } d}{3} \\ V_{VMAD} &= \frac{\text{Aria } \Delta MAD \cdot VO}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \text{Aria } \Delta VAD \cdot \text{distanta } d &= \text{Aria } \Delta MAD \cdot VO \Rightarrow \\ \text{distanta } d &= \frac{\text{Aria } \Delta MAD \cdot VO}{\text{Aria } \Delta VAD} \end{aligned}$$

$$\text{Aria } \Delta MAD = \frac{AD \cdot MN}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aria } \Delta VAD = \text{Aria } \Delta VBC = \frac{VM \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$d = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \text{distanta } d = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

* Distanta mai poate fii determinata si prin urmatoarea metoda:

Se demonstreaza ca $d(M ; (VAD))$ este segmentul MP

$$\left. \begin{aligned} MN \perp AD \text{ si } VN \perp AD \Rightarrow AD \perp (MNV) \\ \text{Construiesc } MP \perp VN, \text{ dar } MP \subset (MNV) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD \perp MP \Rightarrow MP \perp AD$$

Daca $MP \perp VN$, $MP \perp AD$ iar VN si AD sunt 2 drepte concurente din planul (VAD) \Rightarrow

$$\Rightarrow MP \perp (VAD) \Rightarrow d(M ; (VAD)) = MP$$

$$\text{Deoarece } VM = AB \Rightarrow \Delta VMN \text{ echilateral cu MP inaltime} \Rightarrow MP = \frac{VM \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

* In situatiile mai dificile utilizati prima metoda prezentata.

e) $DC \parallel MN \Rightarrow \angle(VM ; DC) = \angle(VM ; MN) = \angle(VMN)$

Deoarece ΔVMN este echilateral \Rightarrow masura unghiului $VMN = 60^\circ \Rightarrow \angle(VM ; DC) = 60^\circ$