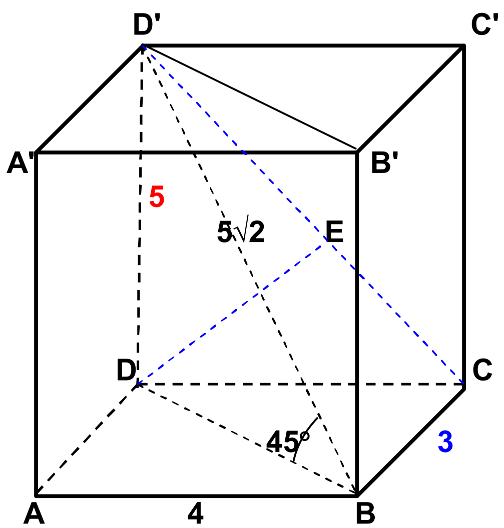
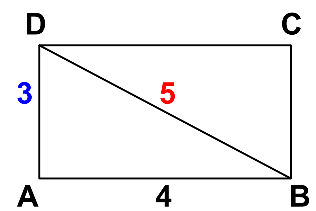
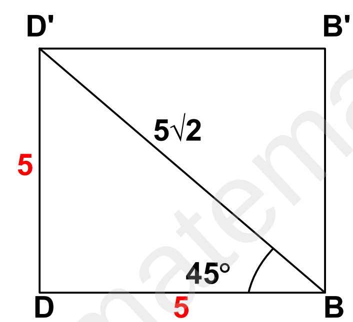
G1. PRISMA PATRULATERA DREAPTA - PROBLEME REZOLVATE

1) ABCDA'B'C'D' este un paralelipiped dreptunghic. Diagonala paralelipipedului este $5\sqrt{2}$ cm, unghiul dintre diagonala paralelipipedului si planul bazei este de 45°, muchia bazei AB = 4 cm. Se cere: a) Aria laterala, aria totala si volumul paralelipipedului ; b) Aria sectiunii diagonale ; c) Distanta de la punctul D' la muchia BC ; d) distanta de la punctul D la planul (D'BC) ; e) Sinusul unghiului dintre planele (D'BC) si (DBC).

REZOLVARE







a) Mai intai calculez elementele paralelipipedului (inaltimea si latimea bazei)

DB este proiectia lui BD' pe (ABCD) $\Rightarrow \angle$(BD' ; (ABCD)) = $\angle$(BD' ; BD) = **$\angle$(D'BD) = 45°**

In Δ D'DB dr. cu m$\angle$(D'BD)=45° $\Rightarrow$ DB = DD'. Notez DB=DD' = x si aplic T.P. in Δ D'DB $\Rightarrow$

$D'D^2 + DB^2 = D'B^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2x^2 = 50$ / :2 $\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ **DB = D'D = 5 cm**

In ΔDAB dr. $\Rightarrow DA^2 = DB^2 - AB^2 \Rightarrow DA^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow DA = \sqrt{9} \Rightarrow$ **DA = 3 cm**

Dimensiunile paralelipipedului sunt : l = 3cm ; L = 4cm ; h = 5 cm.

Aria laterala = Pb·h = 2·(l+L)·h = 2·7·5 = 70 cm^2

Aria totala = Al + 2·Ab = 70 + 2·12 = 70 + 24 = 94 cm^2

Volumul = Ab·h = l·L·h = 3·4·5 = 60 cm^3.

b)Sectiunea diagonala este patrulaterul format de diagonalele bazelor si 2 muchii laterale$\Rightarrow$ **D'DBB'**

Acest patrulater fiind patrat cu latura de 5 cm $\Rightarrow$ **Aria $_{D'DBB'}$** = 5^2 = **25 cm^2**.

c) d(D' ; BC) - utilizez teorema celor 3 perpendiculare.

D'D $\perp$ (ABCD)
DC $\perp$ BC
DC; BC $\subset$ (ABCD)

$\Rightarrow$ D'C $\perp$ BC $\Rightarrow$ **d(D' ; BC) = D'C**

In Δ D'DC dr. $\Rightarrow D'C^2 = D'D^2 + DC^2 \Rightarrow D'C^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow$ **D'C = $\sqrt{41}$ cm.**

d) d(D ; (D'BC))

Metoda1.

$$\left.\begin{array}{l} DC \perp BC \\ CD' \perp BC \\ DC;\ CD' \subset (DCD') \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (DCD')$$

Construiesc **$DE \perp D'C$**

Deoarece $BC \perp (DCD')$ si $DE \subset (DCD') \Rightarrow BC \perp DE \Rightarrow$ **$DE \perp BC$** $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} DE \perp D'C \\ DE \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$DE \perp (D'BC)$** $\Rightarrow$ **$d(D ; (D'BC)) = DE$**

$$\text{In } \Delta\, D'DC \text{ dr.} \Rightarrow DE = \frac{D'D \cdot DC}{D'C} = \frac{5 \cdot 4}{\sqrt{41}} = \frac{20\sqrt{41}}{41} \Rightarrow \mathbf{DE = \frac{20\sqrt{41}}{41}\ cm}$$

Metoda 2

Intre punctul D si planul(D'BC) formez piramida **DD'BC** ; scriu volumul ei in 2 moduri $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} V_{DD'BC} = \dfrac{\text{Aria } \Delta D'BC \cdot d(D; (D'BC))}{3} \\[2ex] V_{DD'BC} = \dfrac{\text{Aria } \Delta DBC \cdot D'D}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Aria } \Delta D'BC \cdot d(D; (D'BC)) = \text{Aria } \Delta DBC \cdot D'D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{d(D; (D'BC)) = \frac{Aria\ \Delta DBC \cdot D'D}{Aria\ \Delta D'BC}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Aria } \mathbf{\Delta DBC} = \dfrac{DC \cdot CB}{2} = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = \mathbf{6\ cm^2} \\[2ex] \textbf{Aria } \mathbf{\Delta D'BC} = \dfrac{D'C \cdot CB}{2} = \dfrac{\sqrt{41} \cdot 3}{2} = \mathbf{\dfrac{3\sqrt{41}}{2}\ cm^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{d(D; (D'BC))} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3\sqrt{41}} = \mathbf{\frac{20\sqrt{41}}{41}\ cm}.$$

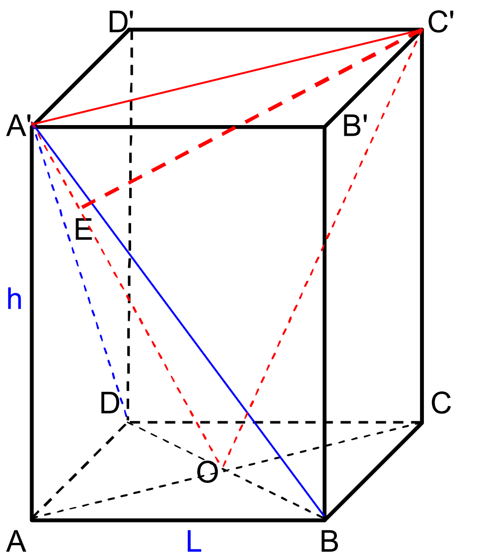
e) sin ∠((D'BC); (DBC))

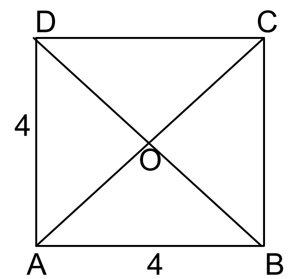
$$\left.\begin{array}{l} (DBC) \cap (D'BC) = BC \\ DC \perp BC ;\ DC \subset (DBC) \\ D'C \perp BC ;\ D'C \subset (D'B) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle((D'BC); (DBC)) = \angle(DC ; D'C) = \angle\mathbf{(DCD')}$$

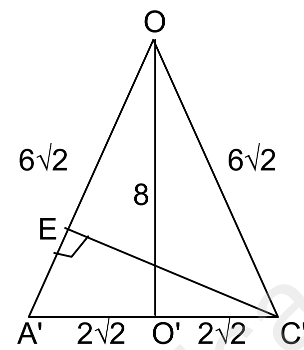
$$\text{In } \Delta D'DC \text{ dr} \Rightarrow \sin \angle(DCD') = \frac{D'D}{D'C} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \Rightarrow \mathbf{\sin \angle(DCD') = \frac{5\sqrt{41}}{41}}$$

2. ABCDA'B'C'D' este o prisma drepta cu baza ABCD patrat. Muchiile AB si AA' sunt direct proportionale cu numerele 2 respectiv 4, iar suma ariilor tuturor fetelor este 160 cm^2. Se cere: a) Aria laterala si volumul prismei ; b) Aria ΔA'BD ; c) distanta de la punctul D la planul A'AO ; d) tangenta unghiului dintre segmentul A'O si planul ABCD ; e) distanta de la C' la A'O

REZOLVARE







a) Notez AB=L si AA'=h , Aria totala = Aria laterala + 2· Aria bazei = $4 \cdot L \cdot h + 2 \cdot L^2 = 160\ cm^2$

{L , h} direct proportionale {2, 4} ⇒ $L = 2 \cdot k$ si $h = 4 \cdot k$

$4 \cdot 2k \cdot 4k + 2 \cdot (2k)^2 = 160 \Rightarrow 32k^2 + 8k^2 = 160 \Rightarrow 40k^2 = 160 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$ **AB=4 cm** si **AA' =8 cm**

Aria laterala = Pb·h = 4·4·8 **= 128 cm^2** ; **Volumul = Ab·h =** $4^2 \cdot 8$ **= 128 cm^2**

b) Aria ΔA'BD

Consider ca BD este baza Δ si construiesc inaltimea din A' (utilizez teorema celor trei perpendiculare)

A'A ⊥ (ABCD)
AO ⊥ DB
AO; DB ⊂ (ABCD)

} ⇒ A'O ⊥ DB ⇒ Aria Δ A'BD = $\dfrac{BD \cdot A'O}{2}$

DB = AB ·√2 = **4√2 cm** ; AC = DB = 4√2 ⇒ AO = $\dfrac{4\sqrt{2}}{2}$ ⇒ AO = 2√2 cm

In ΔA'AO dr. ⇒ $A'O^2 = A'A^2 + AO^2 \Rightarrow A'O^2 = 8^2 + (2\sqrt{2})^2 = 64 + 8 = 72 \Rightarrow A'O = \sqrt{72} \Rightarrow$ **A'O = 6√2 cm**

Aria Δ A'BD = $\dfrac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2}$ = 24 ⇒ **Aria Δ A'BD = 24 cm^2.**

c) d(D ; (A'AO))

DO ⊥ AO
DO ⊥ A'O
AO ; A'O ⊂ (A'OA)
AO ∩ A'O = {O}

} ⇒ DO ⊥ (A'AO) ⇒ **d(D ; (A'AO) = DO = 2√2 cm**

d) tg ∠(A'O ; (ABCD))

$\left.\begin{array}{l} A'A \perp (ABCD) \\ O \in (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow$ OA este proiectia segmentului A'O pe planul (ABCD) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(A'O ; (ABCD)) = \angle(A'O ; OA) = \angle(A'OA)$

In Δ A'AO dr. ⇒ $\mathbf{tg\ \angle(A'OA)} = \frac{A'A}{AO} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

e) d(C' ; A'O)

Pentru rezolvare utilizez o metoda mai simpla.

Formez intre punctul C' si dreapta A'O ΔC'A'O. Observ natura triunghiului(dupa lungimile laturilor)

OA' ≡ OC' (ΔA'AO≡ΔC'CO) ⇒ ΔC'A'O isoscel.

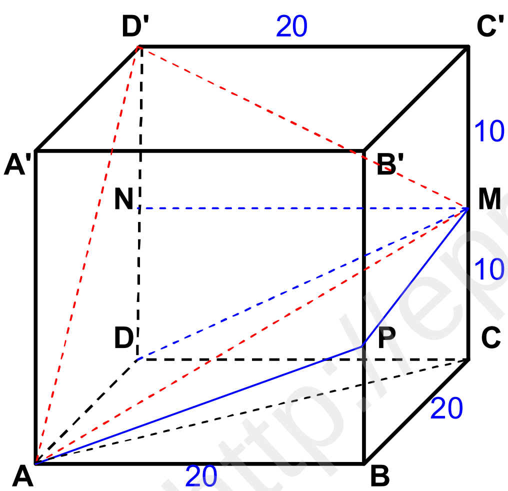
Construiesc C'E ⊥ A'O ⇒ **d(C' ; A'O) = C'E**

In ΔC'A'O ⇒ $C'E \cdot A'O = OO' \cdot C'A' \Rightarrow C'E = \frac{OO' \cdot C'A'}{A'O} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{16}{3}$ cm

d(C' ; A'O) = $\frac{16}{3}$ cm.

3. Cubul ABCDA'B'C'D' are capacitatea de 8 litri. M este mijlocul muchiei CC'. Se cere:
a) aria laterala si aria totala a cubului ; b) aria triunghiului D'MA ; c) volumul piramidei DD'AM ; d) distanta de la D la planul (D'AM) ; e) Determinați poziția unui punct P pe muchia B'B astfel încât perimetrul ΔAPM să fie minim.

REZOLVARE



a) Pornind de la capacitatea cubului, aflu volumul lui. 8 litri = 8 dm^3 = 8000 cm^3

Volumul cubului = 8000 cm^3.

Vcub = $l^3 \Rightarrow l^3 = 8000 \Rightarrow l^3 = (20)^3 \Rightarrow$ **l = 20 cm**

Aria laterala = $4 \cdot l^2$ $= 4 \cdot 20^2 = 4 \cdot 400 =$ **1600 cm^2 ; Aria totala = $6 \cdot l^2$**$= 6 \cdot 20^2 = 6 \cdot 400 =$ **2400 cm^2.**

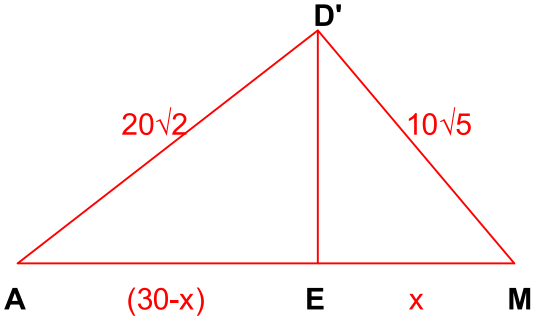
b) Determin laturile ΔD'MA ca sa pot identifica natura Δ, apoi il reprezint in plan si calculez aria lui.

AD' = $l\sqrt{2}$ = **$20\sqrt{2}$ cm** (diagonala in patrat)

In Δ D'C'M dr. ⇒ $D'M^2 = D'C'^2 + C'M^2 \Rightarrow D'M^2 = 20^2+10^2 = 400+100 = 500 \Rightarrow$ **D'M** $= \sqrt{500}$ **$= 10\sqrt{5}$ cm**

In Δ MCA dr. ⇒ $MA^2 = MC^2 + CA^2 \Rightarrow MA^2 = 10^2+(20\sqrt{2})^2 = 100+800 = 900 \Rightarrow$ **MA** $= \sqrt{900}$ **= 30 cm**

AD'=$20\sqrt{2}$ cm ; D'M=$10\sqrt{5}$ cm ; MA=30 cm ⇒ ΔD'MA este triunghi oarecare.



$$\text{Aria } \Delta\, D'MA = \frac{MA \cdot D'E}{2}$$

Notez $EM = x \Rightarrow AE = (30 - x)$

Aplic Teorema lui Pitagora in $\Delta D'EM$ si $\Delta D'EA$

$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \Delta D'EM \text{ dr.} \Rightarrow D'E^2 = D'M^2 - EM^2 \\ \text{In } \Delta D'EA \text{ dr.} \Rightarrow D'E^2 = D'A^2 - EA^2\end{array}\right\} \Rightarrow D'M^2 - EM^2 = D'A^2 - EA^2 \Rightarrow (10\sqrt{5})^2 - x^2 = (20\sqrt{2})^2 - (30-x)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 500 - x^2 = 800 - (900 - 60x + x^2) \Rightarrow 500 - x^2 = 800 - 900 + 60x - x^2 \Rightarrow 60x = 600 \;/ :60 \Rightarrow$ **$x = 10$**

In $\Delta D'EM$ dr. $\Rightarrow D'E^2 = D'M^2 - EM^2 \Rightarrow D'E^2 = (10\sqrt{5})^2 - 10^2 = 500 - 100 = 400 \Rightarrow$ **$D'E = \sqrt{400} = 20$ cm**

$$\text{Aria } \Delta\, D'MA = \frac{MA \cdot D'E}{2} = \frac{30 \cdot 20}{2} = 300 \text{ cm}^2$$ **Aria Δ D'MA = 300 cm^2**

c) Volumul piramidei DD'AM = $\dfrac{\text{Aria bazei} \cdot \text{inaltimea}}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}CD \perp DA \\ CD \parallel MN\end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp DA, \text{ cum } MN \perp D'D \Rightarrow MN \perp (D'DA)$$

Consider baza piramidei $\Delta D'DA$ si inaltimea piramidei segmentul MN

$$\text{Aria } \Delta D'DA = \frac{l^2}{2} = \frac{400}{2} \Rightarrow \text{Aria } \Delta D'DA = 200 \text{ cm}^2.$$

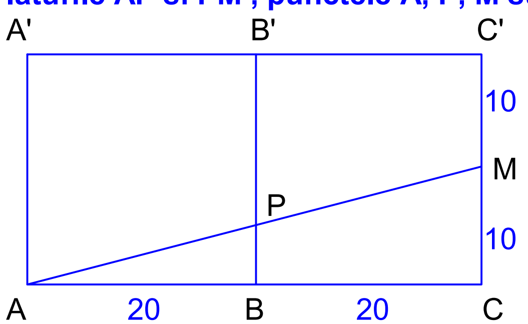
Volumul piramidei DD'AM $= \dfrac{\text{Aria } \Delta D'DA \cdot MN}{3} = \dfrac{200 \cdot 20}{3} =$ **$\dfrac{4000}{3}$ cm^3 .**

d) Pentru a calcula d(D ; (D'AM)) , formez intre punctul D si planul (D'AM) piramida DD'AM

Exprim volumul piramidei DD'AM astfel $V = \dfrac{\text{Aria } \Delta D'AM \cdot d(D\,;\,(D'AM))}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **d(D ; (D'AM)) =** $\dfrac{3 \cdot V_{DD'AM}}{\text{Aria } \Delta D'AM} = 3 \cdot \dfrac{4000}{3} \cdot \dfrac{1}{300} =$ **$\dfrac{40}{3}$ cm.**

e) Perimetrul ΔAPM este minim daca prin desfasurarea suprafetelor cubului pe care se afla laturile AP si PM , punctele A, P, M sunt colineare.



In ΔACM , PB este linie mijlocie $\Rightarrow PB = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{10}{2}$

PB = 5 cm

Punctul P se afla pe muchia BB' la 5 cm față de B.