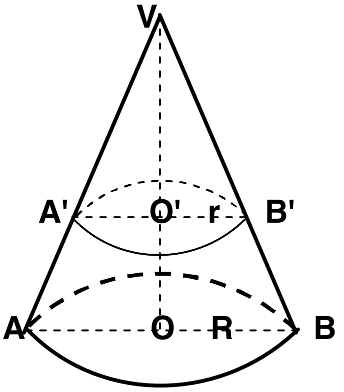
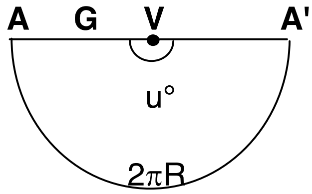
L. CONUL CIRCULAR DREPT - PROBLEME REZOLVATE

1) Un con echilateral are aria sectiunii axiale $36\sqrt{3}cm^2$. Se cere: **a)** Aria totala si volumul conului ;
b) Aria si unghiul sectorului de cerc obtinut prin desfasurarea suprafetei laterale a conului.**c)** La ce distanta de baza trebuie dus un plan paralel cu aceasta astfel incit aria sectiunii obtinute sa fie 16π cm^2.

REZOLVARE





a) Daca conul este echilateral $\Rightarrow$ ΔVAB-echilateral

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \Rightarrow l = 12 \text{ cm} \Rightarrow \mathbf{G = 12cm;\ R = 6cm\ ;\ H=}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \mathbf{6\sqrt{3}cm}$$

$$\mathbf{Al = \pi RG} = \pi\cdot 6\cdot 12 = \mathbf{72\pi\ cm^2}\ ;\ \mathbf{At = \pi R(R+G)} = \pi\cdot 6(6+12) = \mathbf{108\pi\ cm^2}\ ;\mathbf{V = \frac{\pi R^2 H}{3}} = \frac{\pi\cdot 36\cdot 6\sqrt{3}}{3} = \mathbf{72\sqrt{3}\pi\ cm^3}$$

b)

u°.....................$2\pi R$

360°..................$2\pi G$

$$u° = \frac{360°\cdot R}{G}$$

Aria desfasurarii = Aria laterala a conului $\Rightarrow$ Aria desfasurarii = πRG

$$u° = \frac{360°\cdot 6}{12} \Rightarrow \mathbf{u = 180°}$$

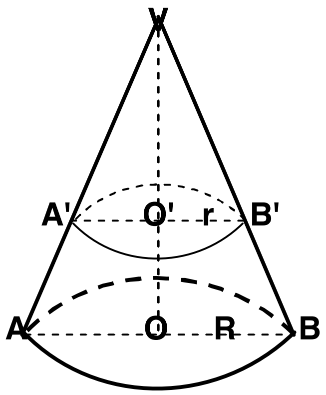
Aria desfasurarii = Al = 72π cm^2

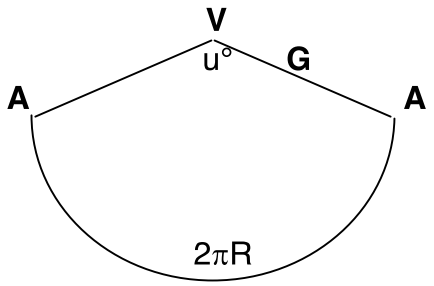
c) Aria sectiunii = $\pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$ **r = 4** ; $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{VO'}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow VO' = 4\sqrt{3}$; $O'O = VO - VO' = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \Rightarrow$ **$O'O = 2\sqrt{3}$ cm.**

2) Generatoarea unui con circular drept este cu 2 cm mai mica decit triplul razei, iar inaltimea este cu 2 cm mai mare decit dublul razei. Se cere: **a)** dimensiunile conului; **b)** aria totala si volumul ;**c)** aria si unghiul sectorului de cerc obtinut prin desfasurarea conului **d)** aria sectiunii obtinute prin sectionarea conului cu un plan paralel cu baza care trece la trei sferturi de virf; **e)** Aria sferei inscrise

REZOLVARE





a) $G = 3R - 2$; $H = 2R + 2$; In ΔVOB cu $m\angle O = 90° \Rightarrow VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow$

$(3R - 2)^2 = (2R + 2)^2 + R^2 \Rightarrow 9R^2 - 12R + 4 = 4R^2 + 8R + 4 + R^2 \Rightarrow 4R^2 - 20R = 0 \Rightarrow 4R(R - 5) = 0$

$\Rightarrow R - 5 = 0 \Rightarrow$ **$R = 5$ cm**

$G = 3\cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13 \Rightarrow$ **$G = 13$ cm** ; $H = 2\cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12 \Rightarrow$ **$H = 12$ cm**.

b) Al $= \pi RG =$ **65π cm^2** ; **Ab** $= \pi R^2 =$ **25π cm^2 ; At =** $Al + Ab =$ **90π cm^2**.

c) $u°$...........R
$360°$........G $\Rightarrow u° = \dfrac{360 \cdot R}{G}$; Aria sector = A l= πRG

$$u° = \frac{360° \cdot 5}{13} = 1800° : 13 = \mathbf{138°} \text{ rest } 6° ;\ 6° = 360' \ \ 360' : 13 = \mathbf{27'} \text{ rest} 9' ;\ 9' = 540'' \ \ 540'' : 13 \cong \mathbf{42''}$$

$u = 138°27'42''$

Aria sectorului = **65π cm^2**

d) $VO' = \dfrac{3}{4} \cdot VO = \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$ cm $\Rightarrow$ **$VO' = 9$cm** ; **$O'O = 3$cm** ; $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'B'}{OB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{9}{12} = \dfrac{r}{5} \Rightarrow r = \dfrac{9\cdot 5}{12} \Rightarrow$ **$r = \dfrac{15}{4}$ cm** $\Rightarrow$ **Aria sectiunii** $= \pi r^2 =$ **$\dfrac{225\pi}{16}$ cm^2.**

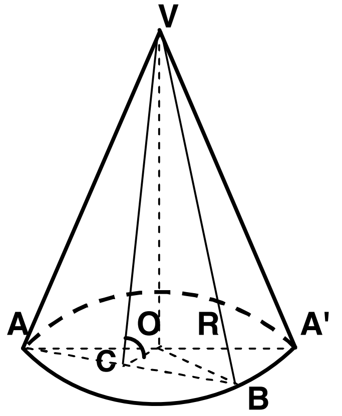
e) Aria ΔVAB $= AB\cdot VO / 2 = 10\cdot 12 / 2 =$ **60cm^2 ; Semiperim. Δ** $= (2\cdot 13+10) / 2 =$ **18 cm**

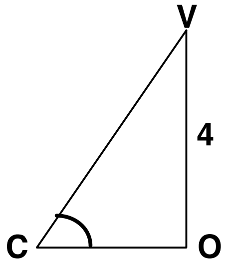
Aria sferei=$4\pi R^2 s$; Rs=raza sferei=raza cercului inscris in $\Delta VAB \Rightarrow Rs = \dfrac{A}{p} = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow$

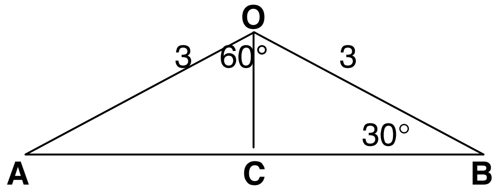
$\Rightarrow$ **Aria sferei** $= 4\pi \cdot 100 / 9 =$ **$400\pi / 9$ cm^2**

3) Un con circular drept are raza, inaltimea, generatoarea exprimate prin 3 numere naturale consecutive si raportul dintre aria laterala si aria bazei 5 / 3. Se cere: **a)** Aria si volumul conului **b)** raza sferei echivalente cu conul ; **c)** Dacă punctul B se află pe cercul de la baza conului astfel încât măsura arcului AB = 120°, aflați sin $\angle$ diedru format de planul (VAB) și planul bazei.

REZOLVARE







a) $\frac{Al}{Ab} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\pi RG}{\pi R^2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{R}{G} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ $\mathbf{R = 3k}$; $\mathbf{G = 5k}$

In ΔVOA cu m $\angle O = 90° \Rightarrow VA^2 = VO^2 + AO^2 \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow H^2 = 25k^2 - 9k^2 = 16k^2 \Rightarrow$ $\mathbf{H = 4k}$

Daca R, H, G sunt numere consecutive $\Rightarrow H = R+1 \Rightarrow 4k = 3k + 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

R = 3 cm ; H = 4 cm ; G = 5 cm.

Aria $= Al + Ab = \mathbf{\pi R(R+G)} = \pi\cdot 3(3 + 5) = \mathbf{24\pi\ cm^2}$; $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{\pi R^2 H}}{\mathbf{3}} = \frac{\pi\cdot 9\cdot 4}{3} = \mathbf{12\pi\ cm^3}$.

b) Daca sfera este echivalenta cu conul $\Rightarrow$ **Volum sfera = Volum con** $\Rightarrow \frac{4\pi R_S^3}{3} = 12\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R_S^3 = 27 \Rightarrow R_S^3 = 3^3 \Rightarrow \mathbf{R_S = 3\ cm}$.

c) $\left.\begin{array}{l} (VAB) \cap (\text{planul bazei}) = AB \\ VC \perp AB \text{ ; } VC \subset (VAB) \\ OC \perp AB \text{ ; } OC \subset (\text{planul bazei}) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle((VAB) \text{ ; } (\text{planul bazei})) = \angle(VC \text{ ; } OC) = \angle(VCO)$

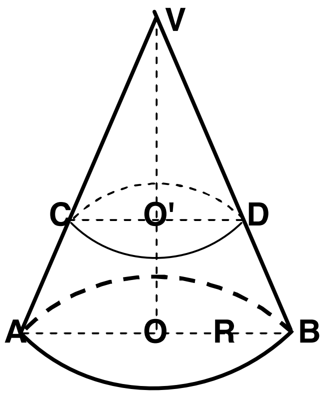
Daca m(AB) = 120° $\Rightarrow$ m$\angle$(AOB) = 120°. In ΔOCA, m$\angle C = 90°$, $\angle A = 30° \Rightarrow OC = \frac{OA}{2} \Rightarrow OC = \frac{3}{2}$ cm

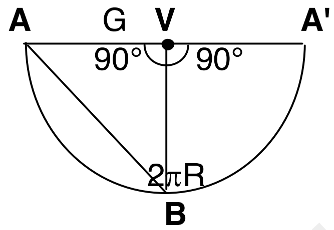
In ΔVOC, m$\angle O = 90° \Rightarrow VC^2 = VO^2 + OC^2 = 16 + \frac{9}{4} = \frac{72}{4} \Rightarrow VC = 3\sqrt{2}$cm $\Rightarrow$ $\sin\angle(VCO) = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

4) Desfasurarea suprafetei laterale a unui con este un semidisc cu raza de $8\sqrt{3}$ cm. Se cere:

a) Raza, generatoarea si inaltimea conului ; **b)** Aria si volumul conului; **c)** Drumul cel mai scurt de la A la B pe suprafata laterala a conului, unde[AB] este diametrul bazei conului; **d)** Volumul trunchiului de con obtinut prin sectionarea conului cu un plan paralel cu baza la 3 / 4 din inaltime fata de virf.

REZOLVARE





a) Raza sectorului de cerc obtinut prin desfasurarea conului = generatoarea conului $\Rightarrow$ $\mathbf{G = 8\sqrt{3}}$ **cm**

180° ....$2\pi R$ 180° ....R

360°........... $2\pi G$ 360°........... $8\sqrt{3}$

$R = \dfrac{180° \cdot 8\sqrt{3}}{360°} \Rightarrow$ $\mathbf{R = 4\sqrt{3}}$ **cm**

In ΔVOB, $m\angle O = 90° \Rightarrow VO^2 = VB^2 - 0B^2 = 192 - 48 = 144 \Rightarrow VO = \sqrt{144} \Rightarrow$ **VO = 12 cm**

b) $\mathbf{At = \pi R(R + G)} = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = \mathbf{144\pi}$ **cm²** ; $\mathbf{V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}} = \dfrac{\pi \cdot 48 \cdot 12}{3} = \mathbf{192\pi}$ **cm³**

b) Drumul cel mai scurt este coarda AB din desfasurarea conului.

In ΔAVB, $m\angle V = 90° \Rightarrow AB^2 = AV^2 + VB^2 = 192 + 192 = 384 \Rightarrow$ $\mathbf{AB = 8\sqrt{6}}$ **cm**

c) $\dfrac{\mathbf{V_{CON\ MIC}}}{\mathbf{V_{CON\ MARE}}} = \mathbf{\left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^3} \Rightarrow \dfrac{V_{CON\ MIC}}{192\pi} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow V_{CON\ MIC} = 81\pi cm^3 \Rightarrow$

$\mathbf{V_{TRUNCHI} = V_{CON\ MARE} - V_{CON\ MIC}} = 192\pi - 81\pi \Rightarrow \mathbf{V_{TRUNCHI} = 111\pi}$ **cm³**.